Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Flächenintegral

Aufgabe: Die Fläche zwischen der Funktion $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x$ und der x-Achse ist zu bestimmen.

Lösung: I. Es gilt allgemein die folgende

Vorgehensweise:
Bestimmung der Nullstellen einer Funktion f(x): f(x) = 0 (auf einem Intervall [a; b]). (Intervallgrenzen und) Nullstellen sind: x_1, x_2, x_3, …
Bestimmung einer Stammfunktion F(x) zu f(x)
Errechnung der bestimmten Integrale als Teilflächen: $\pm A_1 = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = [F(x)]_{x_1}^{x_2}$, $\pm A_2 = \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx = [F(x)]_{x_2}^{x_3}$, …
Aufaddieren der Teilflächen zur Gesamtfläche: $A = A_1 + A_2 + \dots$

Fläche zwischen Funktion und x-Achse

II. Es ergeben sich mit:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x\left(-\frac{1}{2}x - 2\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee -\frac{1}{2}x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee -2 = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \vee x = -4$$

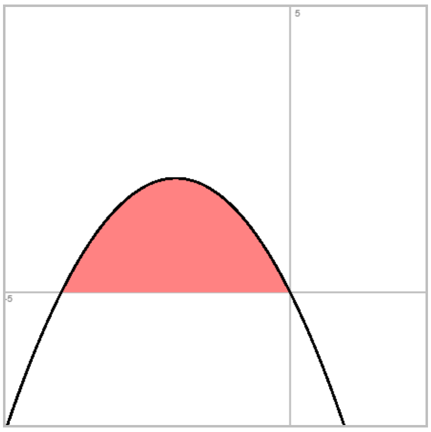
als <u>Nullstellen</u>. Die Nullstellen begrenzen als untere Grenze x = -4 und als obere Grenze x = 0 den Integrationsbereich des nun zu berechnenden bestimmten Integrals, das wiederum bei *zwei* Nullstellen für *eine* Fläche zwischen Funktion f(x) und x-Achse steht.

III. Aus $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x$ folgt als <u>Stammfunktion</u>: $F(x) = -\frac{1}{6}x^3 - x^2$. Das <u>bestimmte Integral</u> errechnet sich damit wie folgt (Integral, Stammfunktion, Einsetzen von oberer und unterer Grenze):

$$\int_{-4}^{0}\left(-\frac{1}{2}x^2 - 2x\right)dx = \left[-\frac{1}{6}x^3 - x^2\right]_{-4}^{0} = \left(-\frac{1}{6}\cdot 0^3 - 0^2\right) - \left(-\frac{1}{6}\cdot(-4)^3 - (-4)^2\right) = -\frac{32}{3} + 16 = \frac{16}{3}.$$

Da das bestimmte Integral positiv ist, ist sein Wert identisch mit dem <u>Flächeninhalt</u> der Fläche zwischen Funktion f(x) und x-Achse, also:

A = $\frac{16}{3}$ FE.



(FE = Flächeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 10.2022 / Aufgabe 1726