Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Flächenintegral

Aufgabe: Die Fläche zwischen der Funktion $f(x) = 3x^2 - x^3$ und der x-Achse ist zu bestimmen.

Lösung: I. Es gilt allgemein die folgende

Vorgehensweise:
Bestimmung der Nullstellen einer Funktion f(x): f(x) = 0 (auf einem Intervall [a; b]). (Intervallgrenzen und) Nullstellen sind: x_1, x_2, x_3, …
Bestimmung einer Stammfunktion F(x) zu f(x)
Errechnung der bestimmten Integrale als Teilflächen: $\pm A_1 = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = [F(x)]_{x_1}^{x_2}$, $\pm A_2 = \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx = [F(x)]_{x_2}^{x_3}$, …
Aufaddieren der Teilflächen zur Gesamtfläche: A = A_1 + A_2 + …

Fläche zwischen Funktion und x-Achse

II. Als Nullstellen berechnen wir:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - x^3 = 0 \Leftrightarrow x^2(3-x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \vee 3 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$$

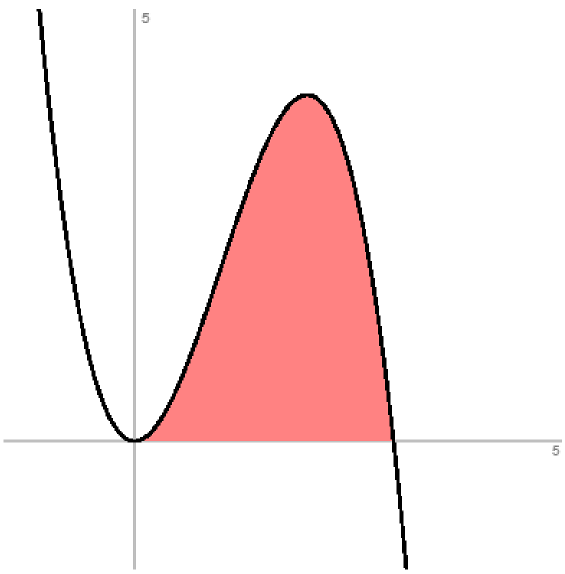
Die Nullstellen begrenzen als untere Grenze x = 0 und als obere Grenze x = 3 den Integrationsbereich des nun zu berechnenden bestimmten Integrals, das wiederum bei *zwei* Nullstellen für *eine* Fläche zwischen Funktion f(x) und x-Achse steht.

III. Aus $f(x) = 3x^2 - x^3$ folgt als Stammfunktion: $F(x) = x^3 - \frac{1}{4}x^4$. Das bestimmte Integral errechnet sich damit wie folgt (Integral, Stammfunktion, Einsetzen von oberer und unterer Grenze):

$$\int_0^3 (3x^2 - x^3)dx = \left[x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^3 = \left(3^3 - \frac{1}{4}\cdot 3^4\right) - \left(0^3 - \frac{1}{4}\cdot 0^4\right) = 27 - 20{,}25 = 6{,}75.$$

Da das bestimmte Integral positiv ist, ist sein Wert identisch mit dem Flächeninhalt der Fläche zwischen Funktion f(x) und x-Achse, also:

A = 6,75 FE.



(FE = Flächeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 10.2022 / Aufgabe 1727