Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Flächenintegral

Aufgabe: Die (Gesamt-) Fläche zwischen der Funktion $f(x) = x^3 + 4x^2 - 12x$ und der x-Achse ist zu bestimmen.

Lösung: I. Es gilt allgemein die folgende

Vorgehensweise:
Bestimmung der Nullstellen einer Funktion f(x): f(x) = 0 (auf einem Intervall [a; b]). (Intervallgrenzen und) Nullstellen sind: x_1, x_2, x_3, …
Bestimmung einer Stammfunktion F(x) zu f(x)
Errechnung der bestimmten Integrale als Teilflächen: $\pm A_1 = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = [F(x)]_{x_1}^{x_2}$, $\pm A_2 = \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx = [F(x)]_{x_2}^{x_3}$, …
Aufaddieren der Teilflächen zur Gesamtfläche: A = A_1 + A_2 + …

Fläche zwischen Funktion und x-Achse

II. Als Nullstellen berechnen wir:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 4x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow x\left(x^2 + 4x - 12\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 + 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \vee x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-4 \pm 8}{2} \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \vee x_1 = \frac{-4+8}{2} = 2 \vee x_2 = \frac{-4-8}{2} = -6$$

Bei *drei* Nullstellen sind also *zwei* Teilflächen A_1, A_2 zwischen Funktion f(x) und x-Achse und jeweils zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen x = -6, x = 0, x = 2 zu berechnen. Die Berechnung erfolgt dabei mit zwei bestimmten Integralen als Flächenintegralen.

III. Aus $f(x) = x^3 + 4x^2 - 12x$ folgt zunächst als Stammfunktion: $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 6x^2$. Wir betrachten dann die zu berechnenden Teilflächen A_1, A_2:

Teilfläche A_1: Das bestimmte Integral errechnet sich mit unterer Grenze x = -6 und oberer Grenze x= 0:

$$\int_{-6}^{0}\left(x^3 + 4x^2 - 12x\right)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 6x^2\right]_{-6}^{0} =$$

$$\left(\frac{1}{4} \cdot 0^4 + \frac{4}{3} \cdot 0^3 - 6 \cdot 0^2\right) - \left(\frac{1}{4} \cdot (-6)^4 + \frac{4}{3} \cdot (-6)^3 - 6 \cdot (-6)^2\right) = 180.$$

Da das bestimmte Integral positiv ist, ist der Flächeninhalt der Teilfläche A_1 zwischen Funktion f(x) und x-Achse auf dem Intervall [-6; 0] der Integralwert, also:

A_1 = 180 FE.

Teilfläche A_2: Das bestimmte Integral errechnet sich mit unterer Grenze x = 0 und oberer Grenze x= 2:

$$\int_0^2 \left(x^3 + 4x^2 - 12x\right)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 6x^2\right]_0^2 =$$

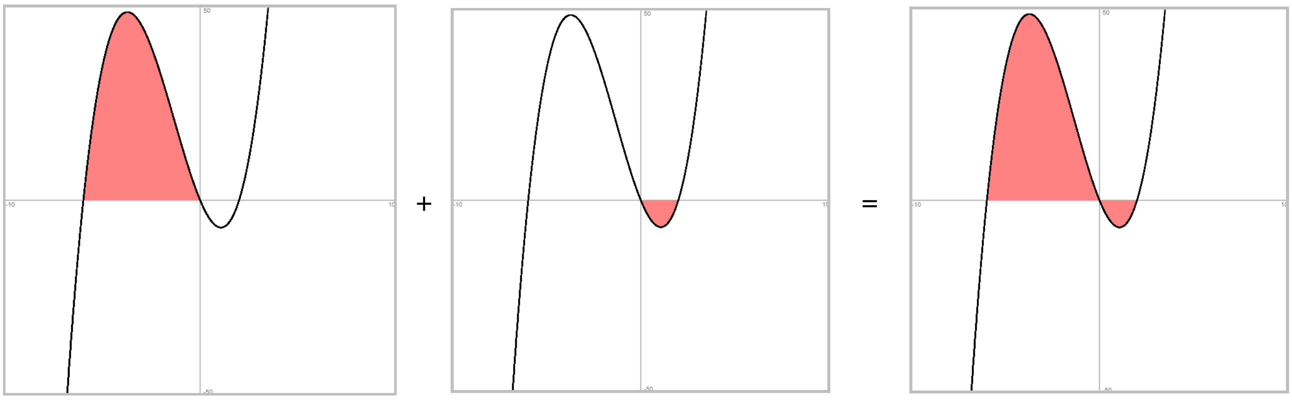
$$\left(\frac{1}{4}\cdot 2^4 + \frac{4}{3}\cdot 2^3 - 6\cdot 2^2\right) - \left(\frac{1}{4}\cdot 0^4 + \frac{4}{3}\cdot 0^3 - 6\cdot 0^2\right) = -\frac{28}{3} = -9\frac{1}{3}.$$

Da das bestimmte Integral negativ ist, ist der Flächeninhalt der Teilfläche A_2 zwischen Funktion f(x) und x-Achse auf dem Intervall [0; 2] das Minusfache des Integralwertes, also:

$A_2 = -(-9\frac{1}{3}) = 9\frac{1}{3}$ FE.

Aus den Inhalten der zwei Teilflächen A_1, A_2 ergibt sich der Flächeninhalt der Gesamtfläche A durch Addition:

$A = A_1 + A_2 = 180 + 9\frac{1}{3} = 189\frac{1}{3}$ FE.



A_1 + A_2 = A

(FE = Flächeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 10.2022 / Aufgabe 1728