

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Flächenintegral

Aufgabe: Die Fläche zwischen der Funktion $f(x) = x^3 + 1$ und den Achsen des x-y-Koordinatensystems ist zu berechnen.

Lösung: I. Als Nullstelle der Funktion $f(x)$ berechnen wir:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -1 \Leftrightarrow x = -1$$

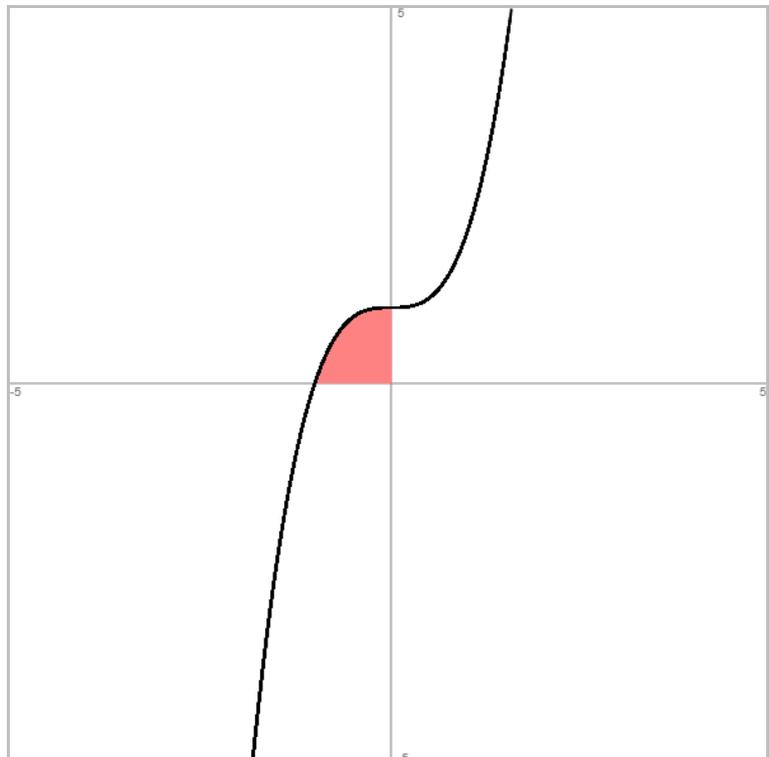
Die Nullstelle $x = -1$ dient als untere Grenze des zu noch bestimmenden Flächenintegrals. Die obere Grenze $x = 0$ des Integrationsbereichs ist durch die y-Achse gegeben.

II. Aus $f(x) = x^3 + 1$ folgt zunächst als Stammfunktion: $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + x$. Wir berechnen dann das bestimmte (Flächen-) Integral:

$$\int_{-1}^0 (x^3 + 1) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + x \right]_{-1}^0 = \left(\frac{1}{4} \cdot 0^4 + 0 \right) - \left(\frac{1}{4} \cdot (-1)^4 + (-1) \right) = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}.$$

Da das bestimmte Integral positiv ist, ist sein Wert identisch mit dem Flächeninhalt der Fläche zwischen Funktion $f(x)$, x- und y-Achse, also:

$$A = \frac{3}{4} \text{ FE.}$$



(FE = Flächeneinheiten)