Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Flächenintegral

Aufgabe: Der Inhalt der Fläche zwischen den Funktionen $f(x)=\frac{1}{2}x^3$ und $g(x)=4x^2$ ist zu berechnen.

Lösung: I. Es gilt allgemein die folgende

Vorgehensweise:
Bestimmung der Schnittstellen zweier Funktionen f(x) und g(x): f(x) = g(x) (auf einem Intervall [a; b]). (Intervallgrenzen und) Schnittstellen sind: x_1, x_2, x_3, … (n Schnittstellen, n-1 Flächen)
Bestimmung einer Stammfunktion H(x) zu h(x) = f(x) – g(x) (Differenzfunktion h(x) vereinfachen)
Errechnung der bestimmten Integrale als Teilflächen: $\pm A_1=\int_{x_1}^{x_2}h(x)dx=[H(x)]_{x_1}^{x_2}$, $\pm A_2=\int_{x_2}^{x_3}h(x)dx=[H(x)]_{x_2}^{x_3}$, $\cdots$
Aufaddieren der Teilflächen zur Gesamtfläche: $A = A_1 + A_2 + …$

Fläche zwischen zwei Funktionen

II. Als <u>Schnittstellen</u> der Funktionen f(x) und g(x) berechnen wir:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow\frac{1}{2}x^3=4x^2\Leftrightarrow\frac{1}{2}x^3-4x^2=0\Leftrightarrow x^2\left(\frac{1}{2}x-4\right)=0\Leftrightarrow x^2=0\vee\frac{1}{2}x-4=0\Leftrightarrow$$

$$x=0\vee\frac{1}{2}x=4\Leftrightarrow x=0\vee x=8.$$

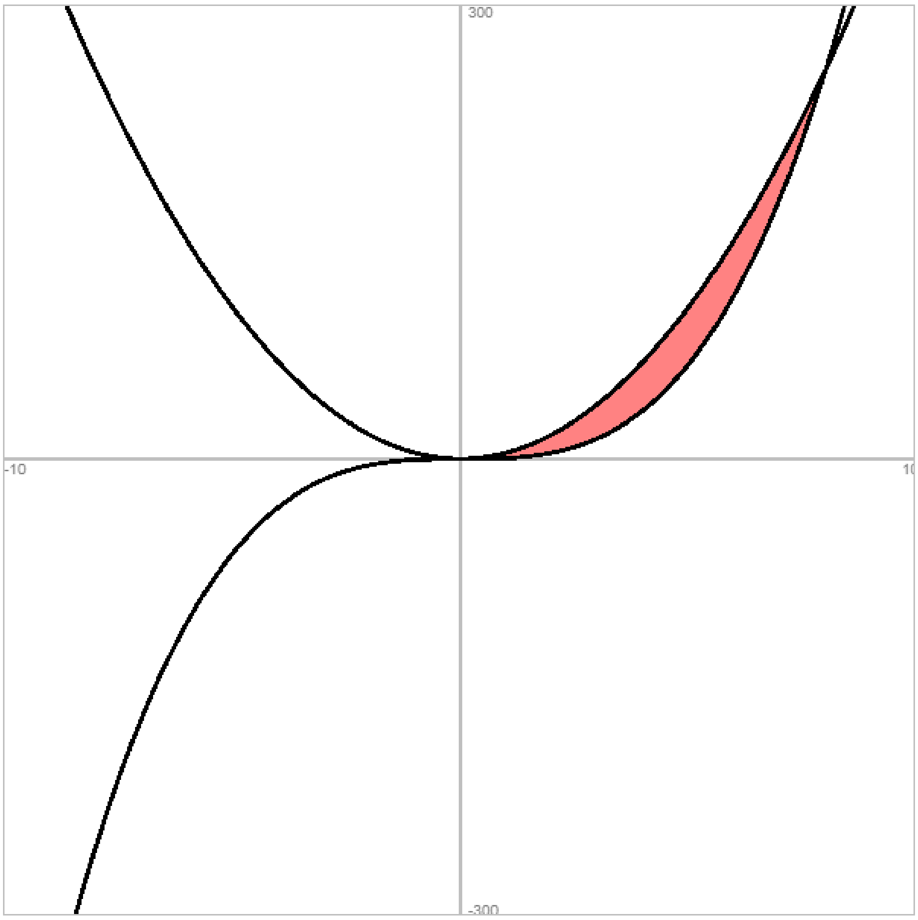
Die Schnittstellen begrenzen als untere Grenze x = 0 und als obere Grenze x = 8 den Integrationsbereich des nun zu berechnenden bestimmten Integrals, das wiederum bei *zwei* Schnittstellen für *eine* Fläche zwischen den Funktionen f(x) und g(x) steht.

III. Zu beachten ist, dass bei der Schnittstellenberechnung der Term $f(x)-g(x)=\frac{1}{2}x^3-4x^2$ = h(x) aufgetreten ist. Diesen verwenden wir, um mit ihm das bestimmte Flächenintegral zu errechnen. Aus $h(x)=\frac{1}{2}x^3-4x^2$ folgt zunächst als <u>Stammfunktion</u>: $H(x)=\frac{1}{8}x^4-\frac{4}{3}x^3$. Wir berechnen dann das bestimmte (Flächen-) Integral in den errechneten Grenzen x = 0, x = 8:

$$\int_0^8(\frac{1}{2}x^3-4x^2)dx=\left[\frac{1}{8}x^4-\frac{4}{3}x^3\right]_0^8=\left(\frac{1}{8}\cdot 8^4-\frac{4}{3}\cdot 8^3\right)-\left(\frac{1}{8}\cdot 0^4-\frac{4}{3}\cdot 0^3\right)=-\frac{512}{3}=-170\frac{2}{3}.$$

Da das bestimmte Integral negativ ist, ist der <u>Flächeninhalt</u> der Fläche zwischen den Funktionen f(x) und g(x) auf dem Intervall [0; 8] das Negative des Integralwerts, also:

A = $-\left(-170\frac{2}{3}\right)$ = $170\frac{2}{3}$ FE.



(FE = Flächeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 10.2022 / Aufgabe 1733