Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Flächenintegral

Aufgabe: Der Inhalt der Fläche zwischen den Funktionen $f(x) = x^3$ und $g(x) = 0,5x^2 + 5x$ ist zu berechnen.

Lösung: I. Es gilt allgemein die folgende

Vorgehensweise:
Bestimmung der Schnittstellen zweier Funktionen f(x) und g(x): f(x) = g(x) (auf einem Intervall [a; b]). (Intervallgrenzen und) Schnittstellen sind: x_1, x_2, x_3, … (n Schnittstellen, n-1 Flächen)
Bestimmung einer Stammfunktion H(x) zu h(x) = f(x) – g(x) (Differenzfunktion h(x) vereinfachen)
Errechnung der bestimmten Integrale als Teilflächen: $\pm A_1 = \int_{x_1}^{x_2} h(x)dx = [H(x)]_{x_1}^{x_2}$, $\pm A_2 = \int_{x_2}^{x_3} h(x)dx = [H(x)]_{x_2}^{x_3}$, …
Aufaddieren der Teilflächen zur Gesamtfläche: A = A_1 + A_2 + …

Fläche zwischen zwei Funktionen

II. Als Schnittstellen der Funktionen f(x) und g(x) berechnen wir:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 = 0,5x^2 + 5x \Leftrightarrow x^3 - 0,5x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 0,5x - 5) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 0,5x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x_{1,2} = \frac{0,5 \pm \sqrt{0,5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1} = \frac{0,5 \pm \sqrt{20,25}}{2} = \frac{0,5 \pm 4,5}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x_1 = \frac{0,5 - 4,5}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \vee x_2 = \frac{0,5 + 4,5}{2} = \frac{5}{2} = 2,5.$$

Die Schnittstellen begrenzen als untere Grenze x = -2, als obere Grenze x = 0, als untere Grenze x = 0 und als obere Grenze x = 2,5 die Integrationsbereiche der nun zu berechnenden bestimmten Integrale, die wiederum bei *drei* Schnittstellen für *zwei* Flächen zwischen den Funktionen f(x) und g(x) stehen.

III. Zu beachten ist, dass bei der Schnittstellenberechnung der Term $f(x) - g(x) = x^3 - 0,5x^2 - 5x$ = h(x) aufgetreten ist. Diesen verwenden wir, um mit ihm die bestimmten Flächenintegrale zu errechnen. Aus $h(x) = x^3 - 0,5x^2 - 5x$ folgt zunächst als Stammfunktion: $H(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - 2,5x^2$.

Wir berechnen dann die bestimmte (Flächen-) Integrale zu den Teilflächen A_1, A_2 in den errechneten Grenzen x = -2, x = 0 bzw. x = 0, x = 2,5:

Teilfläche A_1: Es gilt:

$$\int_{-2}^{0} (x^3 - 0,5x^2 - 5x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - 2,5x^2\right]_{-2}^{0} =$$

$$\left(\frac{1}{4} \cdot 0^4 - \frac{1}{6} \cdot 0^3 - 2,5 \cdot 0^2\right) - \left(\frac{1}{4} \cdot (-2)^4 - \frac{1}{6} \cdot (-2)^3 - 2,5 \cdot (-2)^2\right) = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}.$$

Da das bestimmte Integral positiv ist, ist der Flächeninhalt der Teilfläche A_1 zwischen den Funktionen f(x) und g(x) auf dem Intervall [-2; 0] der Integralwert:

$A_1 = 4\frac{2}{3}$ FE.

Teilfläche A_2: Es gilt:

$$\int_0^{2,5}(x^3 - 0,5x^2 - 5x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - 2,5x^2\right]_0^{2,5} =$$

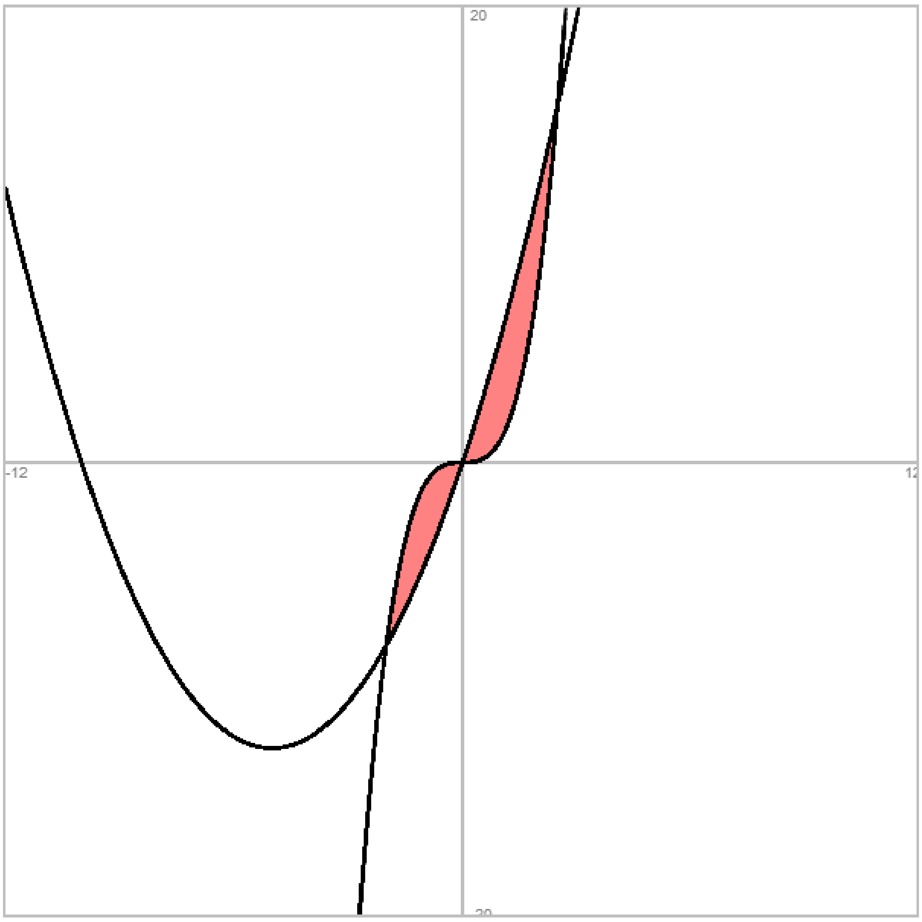
$$\left(\frac{1}{4}\cdot 2,5^4 - \frac{1}{6}\cdot 2,5^3 - 2,5\cdot 2,5^2\right) - \left(\frac{1}{4}\cdot 0^4 - \frac{1}{6}\cdot 0^3 - 2,5\cdot 0^2\right) = -\frac{1625}{192} = -8\frac{89}{192}.$$

Da das bestimmte Integral negativ ist, ist sein mit dem Faktor -1 multiplizierter Wert identisch mit dem Flächeninhalt der Teilfläche zwischen den Funktionen f(x) und g(x) auf dem Intervall [0; 2,5], also:

$A_2 = -\left(-8\frac{89}{192}\right) = 8\frac{89}{192}$ FE.

Aus den Inhalten der zwei Teilflächen A_1, A_2 ergibt sich der Flächeninhalt der Gesamtfläche A durch Addition:

$A = A_1 + A_2 = 4\frac{2}{3} + 8\frac{89}{192} = \frac{2521}{192} = 13\frac{25}{192} \approx 13,1326$ FE.



(FE = Flächeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 10.2022 / Aufgabe 1734