Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Flächenintegral

Aufgabe: Der Inhalt der Fläche zwischen den Funktionen $f(x) = x^4 - 5x^2 - 5$ und $g(x) = -9$ ist zu berechnen.

Lösung: I. Es gilt allgemein die folgende

Vorgehensweise:
Bestimmung der Schnittstellen zweier Funktionen f(x) und g(x): f(x) = g(x) (auf einem Intervall [a; b]). (Intervallgrenzen und) Schnittstellen sind: x_1, x_2, x_3, … (n Schnittstellen, n-1 Flächen)
Bestimmung einer Stammfunktion H(x) zu h(x) = f(x) – g(x) (Differenzfunktion h(x) vereinfachen)
Errechnung der bestimmten Integrale als Teilflächen: $\pm A_1 = \int_{x_1}^{x_2} h(x)dx = [H(x)]_{x_1}^{x_2}$, $\pm A_2 = \int_{x_2}^{x_3} h(x)dx = [H(x)]_{x_2}^{x_3}$, $\cdots$
Aufaddieren der Teilflächen zur Gesamtfläche: $A = A_1 + A_2 + \ldots$

Fläche zwischen zwei Funktionen

II. Als Schnittstellen der Funktionen f(x) und g(x) berechnen wir:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^4 - 5x^2 - 5 = -9 \Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \underset{z=x^2}{\Leftrightarrow} z^4 - 5z + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$z_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \Leftrightarrow z_1 = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \vee z_2 = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4 \underset{x^2=z}{\Leftrightarrow}$$

$$x^2 = 1 \vee x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 1 \vee x = \pm 2.$$

Die *vier* Schnittstellen sind x = -2, x = -1, x = 1, x = 2 und begrenzen als untere bzw. obere Grenzen *drei* Teilflächen A_1, A_2, A_3 zwischen den Funktionen f(x) und g(x).

III. Da die beiden Funktionen jeweils symmetrisch zur y-Achse sind, können wir auf Grundlage der Achsensymmetrie die Gleichheit der Flächeninhalte $A_1 = A_3$ folgern mit A_1 als Fläche auf dem Intervall [-2; -1], A_2 als Fläche auf dem Intervall [1; 2]. Außerdem gilt ebenfalls wegen der Achsensymmetrie hinsichtlich des Flächenintegrals A_2 auf dem Intervall [-1; 1]:

$$\int_{-1}^{1} (f(x) - g(x))dx = 2 \cdot \int_{0}^{1} (f(x) - g(x))dx.$$

IV. Zu beachten ist, dass bei der Schnittstellenberechnung der Term $f(x) - g(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ = h(x) aufgetreten ist. Diesen verwenden wir, um mit ihm die bestimmten Flächenintegrale zu errechnen. Aus $h(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ folgt zunächst als Stammfunktion: $H(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x$. Wir berechnen dann die bestimmte (Flächen-) Integrale zu den Teilflächen A_2, A_3 in den errechneten Grenzen x = -1, x = 1 bzw. x = 1, x = 2:

Teilfläche A_2: Es gilt wegen der Achsensymmetrie laut III.:

$$\int_{-1}^{1} (x^4 - 5x^2 + 4)dx = 2 \cdot \int_{0}^{1} (x^4 - 5x^2 + 4)dx = 2 \cdot \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x\right]_0^1 =$$

$$2\cdot\left[\left(\frac{1}{5}\cdot 1^5-\frac{5}{3}\cdot 1^3+4\cdot 1\right)-\left(\frac{1}{5}\cdot 0^5-\frac{5}{3}\cdot 0^3+4\cdot 0\right)\right]=2\cdot\frac{38}{15}=\frac{76}{15}=5\frac{1}{15}.$$

Da das bestimmte Integral positiv ist, ist der Flächeninhalt der Teilfläche A_2 zwischen den Funktionen f(x) und g(x) auf dem Intervall [-1; 1] der Integralwert:

$A_2 = 5\frac{1}{15}$ FE.

<u>Teilfläche A_3</u>: Es gilt:

$$\int_1^2 (x^4-5x^2+4)dx=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{5}{3}x^3+4x\right]_1^2=$$

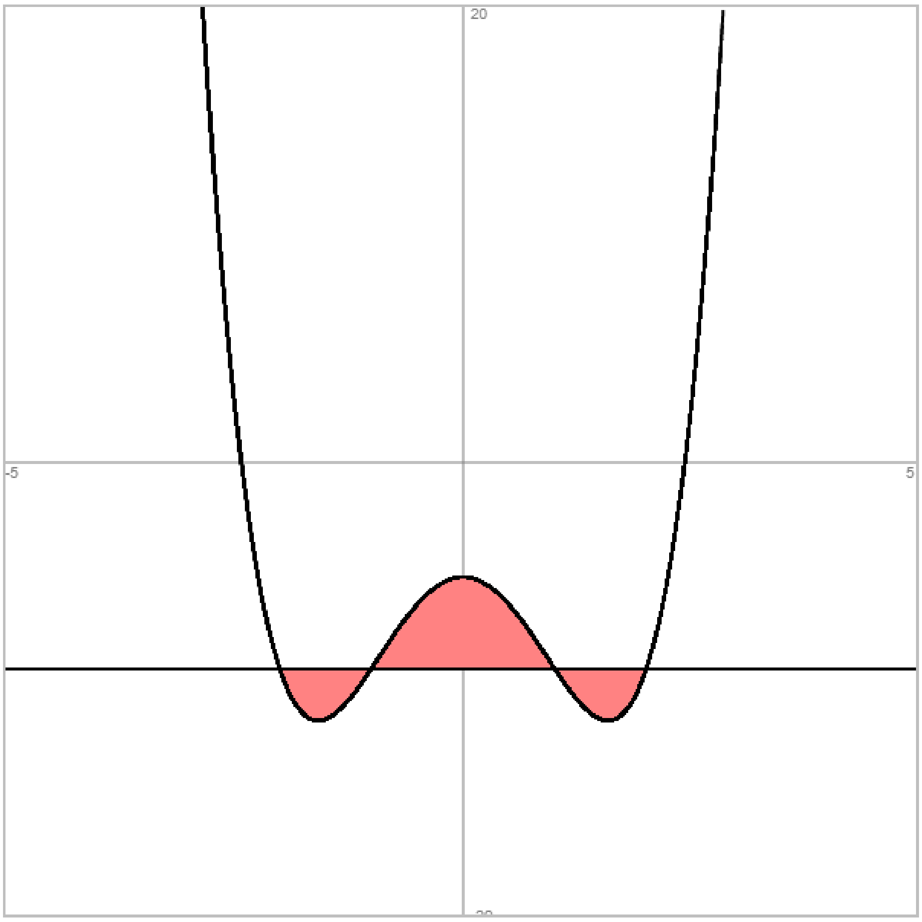
$$\left(\frac{1}{5}\cdot 2^5-\frac{5}{3}\cdot 2^3+4\cdot 2\right)-\left(\frac{1}{5}\cdot 1^5-\frac{5}{3}\cdot 1^3+4\cdot 1\right)=\frac{16}{15}-\frac{38}{15}=-\frac{22}{15}=-1\frac{7}{15}.$$

Da das bestimmte Integral negativ ist, ist sein mit dem Faktor -1 multiplizierter Wert identisch mit dem Flächeninhalt der Teilfläche A_3 zwischen den Funktionen f(x) und g(x) auf dem Intervall [1; 2], also:

$A_3 = -\left(-1\frac{7}{15}\right) = 1\frac{7}{15}$ FE.

Aus den Inhalten der drei Teilflächen A_2 und $A_1 = A_3$ gemäß der Achsensymmetrie laut III. ergibt sich der <u>Flächeninhalt der Gesamtfläche</u> A durch Addition:

$A = A_1 + A_2 + A_3 = 1\frac{7}{15} + 5\frac{1}{15} + 1\frac{7}{15} = 8$ FE.



(FE = Flächeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 10.2022 / Aufgabe 1735