Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Flächenintegral

Aufgabe: Der Inhalt der Fläche zwischen den Funktionen $f(x) = x^3 + x^2$ und $g(x) = x^3 - 4x + 5$ ist zu berechnen.

Lösung: I. Es gilt allgemein die folgende

Vorgehensweise:
Bestimmung der Schnittstellen zweier Funktionen f(x) und g(x): f(x) = g(x) (auf einem Intervall [a; b]). (Intervallgrenzen und) Schnittstellen sind: x_1, x_2, x_3, … (n Schnittstellen, n-1 Flächen)
Bestimmung einer Stammfunktion H(x) zu h(x) = f(x) – g(x) (Differenzfunktion h(x) vereinfachen)
Errechnung der bestimmten Integrale als Teilflächen: $\pm A_1 = \int_{x_1}^{x_2} h(x)dx = [H(x)]_{x_1}^{x_2}$, $\pm A_2 = \int_{x_2}^{x_3} h(x)dx = [H(x)]_{x_2}^{x_3}$, $\cdots$
Aufaddieren der Teilflächen zur Gesamtfläche: A = A_1 + A_2 + …

Fläche zwischen zwei Funktionen

II. Als <u>Schnittstellen</u> der Funktionen f(x) und g(x) berechnen wir:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 + x^2 = x^3 - 4x + 5 \Leftrightarrow = x^2 = -4x + 5 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-10}{2} = -5 \vee x = \frac{2}{2} = 1.$$

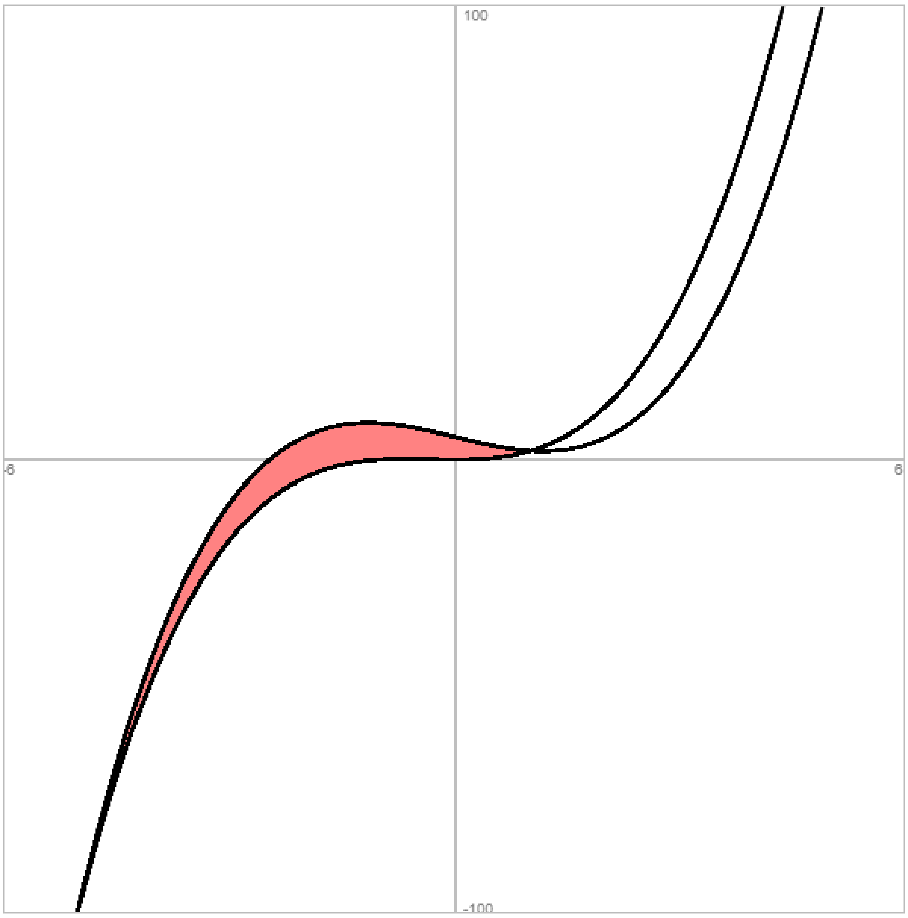
Die Schnittstellen begrenzen als untere Grenze x = -5 und als obere Grenze x = 1 den Integrationsbereich des nun zu berechnenden bestimmten Integrals, das wiederum bei *zwei* Schnittstellen für *eine* Fläche zwischen den Funktionen f(x) und g(x) steht.

III. Zu beachten ist, dass bei der Schnittstellenberechnung der Term $f(x) - g(x) = x^2 + 4x - 5$ = h(x) aufgetreten ist. Da der zu beiden Funktionstermen f(x) und g(x) gehörende Summand x^3 weggefallen ist, können wir mit der Differenzfunktion h(x) umso einfacher das bestimmte Flächenintegral errechnen. Aus $h(x) = x^2 + 4x - 5$ folgt zunächst als <u>Stammfunktion</u>: $H(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x$. Wir berechnen dann das bestimmte (Flächen-) Integral in den errechneten Grenzen x = -5, x = 1:

$$\int_{-5}^{1} (x^2 + 4x - 5)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x\right]_{-5}^{1} = \left(\frac{1}{3} + 2 - 5\right) - \left(-\frac{125}{3} + 50 + 25\right) = -\frac{8}{3} - \frac{100}{3} = -\frac{108}{3} = -36.$$

Da das bestimmte Integral negativ ist, ist der <u>Flächeninhalt</u> der Fläche zwischen den Funktionen f(x) und g(x) auf dem Intervall [-5; 1] das Negative des Integralwerts, also:
A = $-(-36)$ = 36 FE.

Im Übrigen liegt wegen des negativen Integralwerts und der somit nicht positiven Differenzfunktion h(x) im x-y-Koordinatensystem auf dem Intervall [-5; 1] der Graph der Funktion f(x) unterhalb des Graphen der Funktion g(x) mit: $f(x) \leq g(x)$.



(FE = Flächeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 12.2022 / Aufgabe 1758