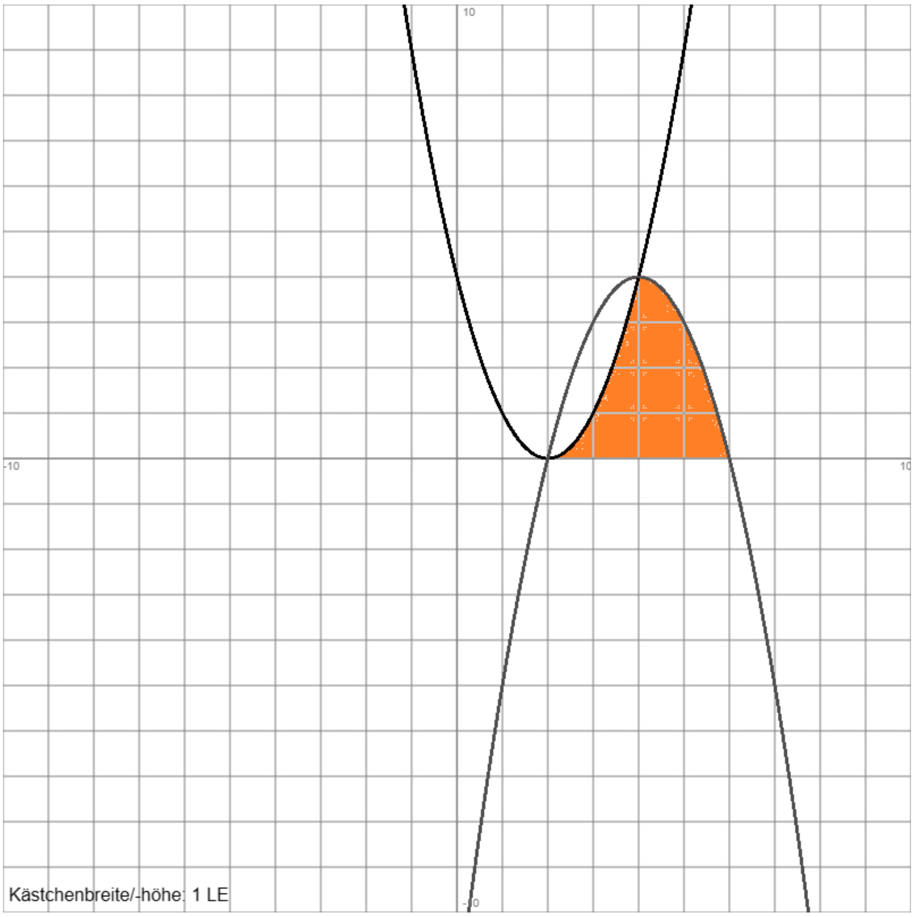
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Flächenintegral

Aufgabe: Der Inhalt der Fläche zwischen den Funktionen $f(x)=(x-2)^2$, $g(x)=-x^2+8x-12$ und der x-Achse ist zu berechnen.

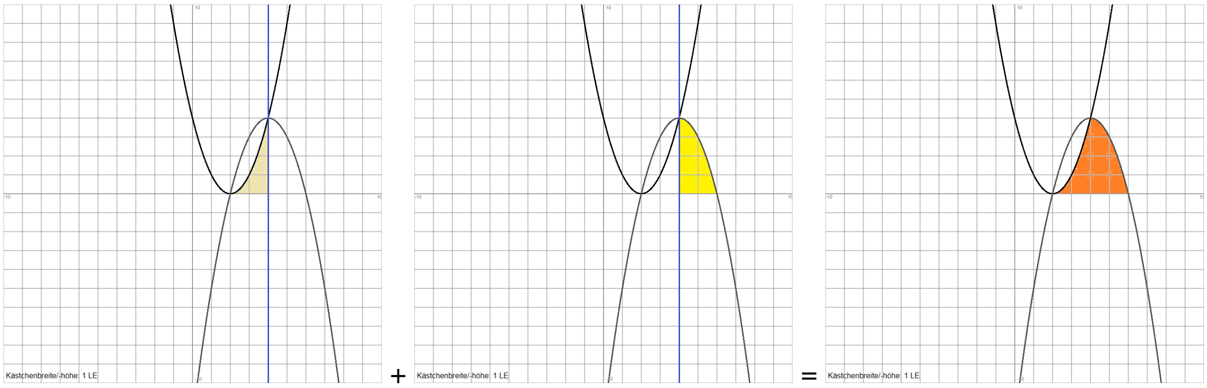


1. Lösung: I. Es gilt allgemein die folgende

Vorgehensweise:
Bestimmung der Nullstellen einer Funktion f(x): f(x) = 0 (auf einem Intervall [a; b]). (Intervallgrenzen und) Nullstellen sind: x_1, x_2, x_3, …
Bestimmung einer Stammfunktion F(x) zu f(x)
Errechnung der bestimmten Integrale als Teilflächen: $\pm A_1 = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = [F(x)]_{x_1}^{x_2}$, $\pm A_2 = \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx = [F(x)]_{x_2}^{x_3}$, …
Aufaddieren der Teilflächen zur Gesamtfläche: $A = A_1 + A_2 + \ldots$

Fläche zwischen Funktion und x-Achse

II. Die in I. beschriebenen Vorgehensweisen sind indes etwas abzuwandeln, wenn wir die Fläche zwischen den Funktionen und der x-Achse in zwei Flächen aufspalten durch die senkrechte Gerade, die durch den rechten Schnittpunkt der Funktionen f(x) und g(x) verläuft, also:



Den Inhalt der linken Fläche A_1 erhalten wir durch Integration über f(x), die der rechten A_2 durch Integration über g(x), die Summe der beiden Flächeninhalte ist der gesuchte Flächeninhalt A.

III. Als <u>Schnittstellen</u> der Funktionen f(x) und g(x) berechnen wir:

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow (x-2)^2 = -x^2+8x-12 \Leftrightarrow = x^2-4x+4 = -x^2+8x-12 \Leftrightarrow 2x^2-12x+16=0 \Leftrightarrow$$

$$x^2-6x+8=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{6^2-4\cdot1\cdot8}}{2\cdot1} \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-32}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{6\pm2}{2} \Leftrightarrow$$

$$x_1=\frac{4}{2}=2 \vee x_2=\frac{8}{2}=4.$$

IV. Wir bestimmen noch die <u>Nullstellen</u> der Funktion g(x) mit:

$$g(x)=0 \Leftrightarrow -x^2+8x-12=0 \Leftrightarrow x^2-8x+12=0 \Leftrightarrow x_{1,3}=\frac{8\pm\sqrt{8^2-4\cdot1\cdot12}}{2\cdot1} \Leftrightarrow$$

$$x_{1,3}=\frac{8\pm\sqrt{64-48}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{8\pm4}{2} \Leftrightarrow x_1=\frac{4}{2}=2 \vee x_3=\frac{12}{2}=6.$$

V. Die Schnittstellen begrenzen als untere Grenze $x_1 = 2$ und als obere Grenze $x_2 = 4$ den Integrationsbereich für die Fläche A_1. Es gilt damit für den <u>Flächeninhalt</u>:

$$A_1 = \int_2^4 f(x)dx = \int_2^4 (x-2)^2 dx = \left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_2^4 = \frac{1}{3}(4-2)^3 - \frac{1}{3}(2-2)^3 = \frac{8}{3} \text{ FE.}$$

VI. Die Schnittstelle $x_2 = 4$ als untere Grenze und die Nullstelle $x_3 = 6$ als obere Grenze begrenzen den Integrationsbereich für die Fläche A_2. Es ergibt sich als <u>Flächeninhalt</u>:

$$A_2 = \int_4^6 g(x)dx = \int_4^6 (-x^2+8x-12)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3+4x^2-12x\right]_4^6 =$$

$$\left(-\frac{1}{3}\cdot6^3+4\cdot6^2-12\cdot6\right)-\left(-\frac{1}{3}\cdot4^3+4\cdot4^2-12\cdot4\right) = (-72+144-72)-(-\frac{64}{3}+64-48) = \frac{16}{3} \text{ FE.}$$

VII. Der gesuchte <u>Flächeninhalt</u> A zwischen den Funktionen $f(x)=(x-2)^2$, $g(x)=-x^2+8x-12$ und der x-Achse ergibt sich somit als Summe:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{8}{3}+\frac{16}{3}=\frac{24}{3} = 8 \text{ FE.}$$

2. Lösung: I. Es gelten allgemein die folgenden Vorgehensweisen:

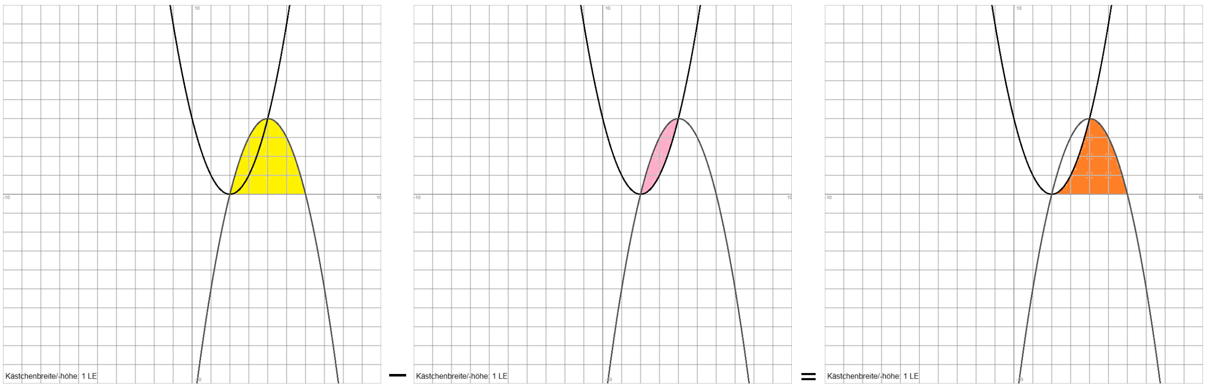
Vorgehensweise:
Bestimmung der Nullstellen einer Funktion f(x): f(x) = 0 (auf einem Intervall [a; b]). (Intervallgrenzen und) Nullstellen sind: x_1, x_2, x_3, …
Bestimmung einer Stammfunktion F(x) zu f(x)
Errechnung der bestimmten Integrale als Teilflächen: $\pm A_1 = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = [F(x)]_{x_1}^{x_2}$, $\pm A_2 = \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx = [F(x)]_{x_2}^{x_3}$, …
Aufaddieren der Teilflächen zur Gesamtfläche: A = A_1 + A_2 + …

Fläche zwischen Funktion und x-Achse

Vorgehensweise:
Bestimmung der Schnittstellen zweier Funktionen f(x) und g(x): f(x) = g(x) (auf einem Intervall [a; b]). (Intervallgrenzen und) Schnittstellen sind: x_1, x_2, x_3, … (n Schnittstellen, n-1 Flächen)
Bestimmung einer Stammfunktion H(x) zu h(x) = f(x) – g(x) (Differenzfunktion h(x) vereinfachen)
Errechnung der bestimmten Integrale als Teilflächen: $\pm A_1 = \int_{x_1}^{x_2} h(x)dx = [H(x)]_{x_1}^{x_2}$, $\pm A_2 = \int_{x_2}^{x_3} h(x)dx = [H(x)]_{x_2}^{x_3}$, …
Aufaddieren der Teilflächen zur Gesamtfläche: A = A_1 + A_2 + …

Fläche zwischen zwei Funktionen

II. Der Flächeninhalt A der Fläche zwischen den Funktionen und der x-Achse lässt sich ermitteln als Differenz des Flächeninhalts A_1 der Fläche zwischen der Funktion g(x) und der x-Achse und des Flächeninhalts A_2 der Fläche zwischen den Funktionen f(x) und g(x).



III. Wir bestimmen die Nullstellen der Funktion g(x) mit:

$$g(x)=0 \Leftrightarrow -x^2+8x-12=0 \Leftrightarrow = x^2-8x+12=0 \Leftrightarrow x_{1,3}=\frac{8\pm\sqrt{8^2-4\cdot1\cdot12}}{2\cdot1} \Leftrightarrow$$

$$x_{1,3}=\frac{8\pm\sqrt{64-48}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{8\pm4}{2} \Leftrightarrow x_1=\frac{4}{2}=2 \vee x_3=\frac{12}{2}=6.$$

IV. Die Nullstelle x_1 = 2 als untere Grenze und die Nullstelle x_3 = 6 als obere Grenze begrenzen den Integrationsbereich für die Fläche A_1. Es ergibt sich als Flächeninhalt:

$$A_1 = \int_2^6 g(x)dx = \int_2^6 (-x^2+8x-12)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3+4x^2-12x\right]_2^6 =$$

$$\left(-\frac{1}{3}\cdot6^3+4\cdot6^2-12\cdot6\right)-\left(-\frac{1}{3}\cdot2^3+4\cdot2^2-12\cdot2\right)=(-72+144-72)-(-\frac{8}{3}+16-24)=\frac{32}{3} \text{ FE.}$$

V. Als Schnittstellen der Funktionen f(x) und g(x) berechnen wir:

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow (x-2)^2=-x^2+8x-12 \Leftrightarrow x^2-4x+4=-x^2+8x-12 \Leftrightarrow 2x^2-12x+16=0 \Leftrightarrow$$

$x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} \Leftrightarrow$
$x_1 = \frac{4}{2} = 2 \vee x_2 = \frac{8}{2} = 4.$

VI. Die Schnittstellen begrenzen als untere Grenze $x_1 = 2$ und als obere Grenze $x_2 = 4$ den Integrationsbereich für die Fläche A_2. Es gilt damit für den Flächeninhalt:

$A_2 = \int_2^4 (g(x) - f(x))dx = \int_2^4 (-2x^2 + 12x - 16)dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 6x^2 - 16x \right]_2^4 =$
$\left(-\frac{2}{3} \cdot 4^3 + 6 \cdot 4^2 - 16 \cdot 4 \right) - \left(-\frac{2}{3} \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 - 16 \cdot 2 \right) = -\frac{32}{3} - \left(-\frac{40}{3} \right) = \frac{8}{3}$ FE.

VII. Der gesuchte Flächeninhalt A zwischen den Funktionen $f(x) = (x-2)^2$, $g(x) = -x^2 + 8x - 12$ und der x-Achse ergibt sich somit als Differenz:

$A = A_1 - A_2 = \frac{32}{3} - \frac{8}{3} = \frac{24}{3} = 8$ FE.

(FE = Flächeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 02.2023 / Aufgabe 1795