Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Flächenintegral

Aufgabe: Die Fläche zwischen der Funktion $f(x) = 27 - 3x^2$ und der x-Achse des x-y-Koordinatensystems im 1. Quadranten soll durch eine zur x-Achse parallele Gerade halbiert werden. Bestimme die Funktionsgleichung dieser Geraden.

1. Lösung: I. Als Nullstelle(n) der Funktion f(x) berechnen wir:

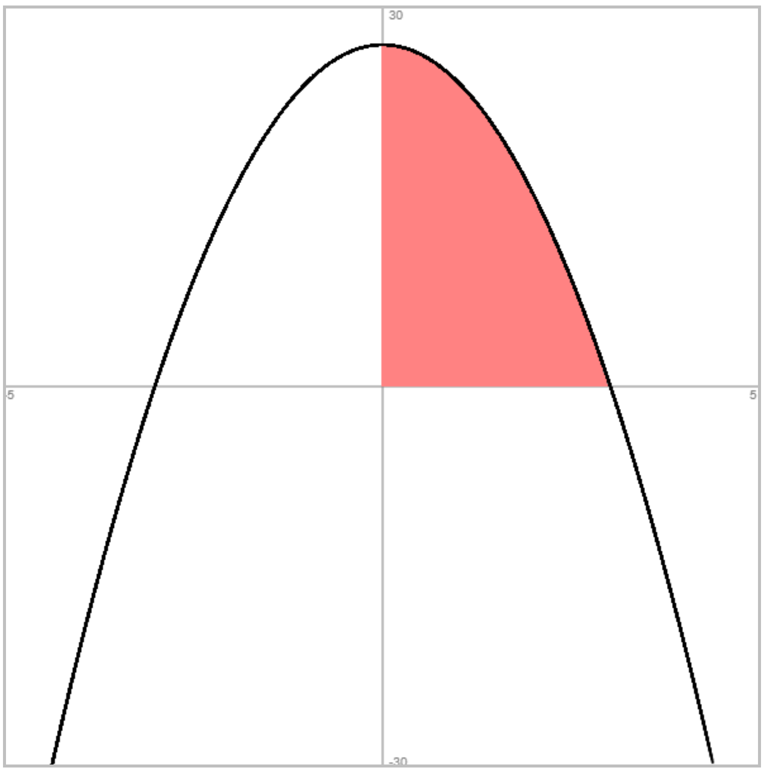
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 27 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow 27 = 3x^2 \Leftrightarrow 9 = x^2 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

Die Nullstelle x = 3 dient als obere Grenze des noch zu bestimmenden Flächenintegrals. Wegen der Verortung der Fläche zwischen Funktion f(x) und x-Achse im 1. Quadranten ist die untere Grenze x = 0 des Integrationsbereichs durch die y-Achse gegeben.

II. Aus $f(x) = 27 - 3x^2$ folgt zunächst als Stammfunktion: $F(x) = 27x - x^3$. Wir berechnen dann das bestimmte (Flächen-) Integral:

A = $\int_0^3 (27 - 3x^2)dx = \left[27x - x^3\right]_0^3 = \left(27 \cdot 3 - 3^3\right) - \left(27 \cdot 0 - 0^3\right)$ = 54 FE.

Der halbe Flächeninhalt beträgt damit: A/2 = 27 FE.



III. Die zur x-Achse parallele Gerade y = a mit 0≤a≤27 schneidet die Funktion $f(x) = 27 - 3x^2$ vermöge:

$$f(x)=a \Leftrightarrow 27-3x^2=a \Leftrightarrow 27-a=3x^2 \Leftrightarrow 9-\frac{a}{3}=x^2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{9-\frac{a}{3}}$$

an der Stelle x = $\sqrt{9-\frac{a}{3}}$. Wir integrieren hinsichtlich der Fläche zwischen Funktion und Gerade oberhalb der Gerade:

A/2 = $\int_0^{\sqrt{9-\frac{a}{3}}}(f(x)-y)dx = \int_0^{\sqrt{9-\frac{a}{3}}}(27-3x^2-a)dx = \left[(27-a)x-x^3\right]_0^{\sqrt{9-\frac{a}{3}}}$ =

$$\left((27-a)\cdot\sqrt{9-\frac{a}{3}}-\sqrt{9-\frac{a}{3}}^3\right)-\left((27-a)\cdot 0-0^3\right)=(27-a)\cdot\sqrt{9-\frac{a}{3}}-\sqrt{9-\frac{a}{3}}^3 =$$

$$\sqrt{9-\frac{a}{3}}\cdot\left[(27-a)-\left(9-\frac{a}{3}\right)\right]=\sqrt{9-\frac{a}{3}}\cdot\left(27-a-9+\frac{a}{3}\right)=\sqrt{9-\frac{a}{3}}\cdot\left(18-\frac{2}{3}a\right) = 27.$$

IV. Wir lösen die Gleichung: $\sqrt{9-\frac{a}{3}}\cdot\left(18-\frac{2}{3}a\right)$ = 27 nach a auf und erhalten:

$\sqrt{9-\frac{a}{3}}\cdot\left(18-\frac{2}{3}a\right) = 27$	$\mid ()^2$
$\left(9-\frac{a}{3}\right)\cdot\left(18-\frac{2}{3}a\right)^2 = 729$	(Klammern auflösen)
$\left(9-\frac{a}{3}\right)\cdot\left(324-24a+\frac{4}{9}a^2\right) = 729$	(Klammern auflösen)
$2916-216a+4a^2-108a+8a^2-\frac{4}{27}a^3 = 729$	(Zusammenfassen)
$-\frac{4}{27}a^3+12a^2-324a+2916 = 729$	| -729
$-\frac{4}{27}a^3+12a^2-324a+2187 = 0$	| ·(-27)
$4a^3-324a^2+8748a-59049 = 0.$	

V. Zur Lösung der Gleichung: $4a^3-324a^2+8748a-59049$ = 0 verwenden wir das <u>Newton-Verfahren</u> und haben für die Funktion h(a) = $4a^3-324a^2+8748a-59049$ noch die 1. Ableitung h'(a) = $12a^2-648a+8748$ zu bestimmen. Wir lassen dann die Folge:

$$a_n = a_{n-1}-\frac{h(a_{n-1})}{h'(a_{n-1})} = a_{n-1}-\frac{4a_{n-1}^3-324a_{n-1}^2+8748a_{n-1}-59049}{12a_{n-1}^2-648a_{n-1}+8748}$$

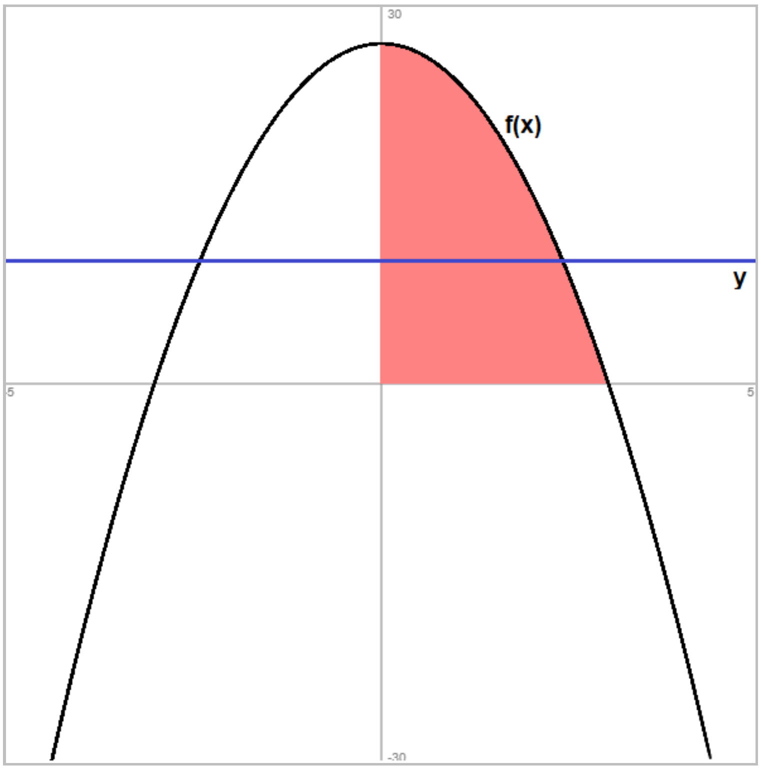
z.B. mit Anfangswert a_0 = 5 iterieren und erhalten die tabellarische <u>Übersicht</u>:

Iteration n =	$\mathbf{a_n}$ = a_{n-1}-h(a_{n-1})/h'(a_{n-1})	**Nullstelle**
	5	
1	8.944387052341597	
2	9.931562604544691	
3	9.9908586300056	
4	9.991065823895266	
5	9.99106582641921	

6	9.991065826419213	
		h(9.991065826419213) = 0

Die zur x-Achse parallele Gerade, die die Fläche zwischen Funktion f(x) und x-Achse im 1. Quadranten halbiert, lautet damit:

y = 9,991065826419213 ≈ 9,991.



2. Lösung: I. Als Nullstelle(n) der Funktion f(x) berechnen wir:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 27 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow 27 = 3x^2 \Leftrightarrow 9 = x^2 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

Die Nullstelle x = 3 dient als obere Grenze des noch zu bestimmenden Flächenintegrals. Wegen der Verortung der Fläche zwischen Funktion f(x) und x-Achse im 1. Quadranten ist die untere Grenze x = 0 des Integrationsbereichs durch die y-Achse gegeben.

II. Aus $f(x) = 27 - 3x^2$ folgt zunächst als Stammfunktion: $F(x) = 27x - x^3$. Wir berechnen dann das bestimmte (Flächen-) Integral:

A = $\int_0^3 (27 - 3x^2)dx = \left[27x - x^3\right]_0^3 = \left(27 \cdot 3 - 3^3\right) - \left(27 \cdot 0 - 0^3\right)$ = 54 FE.

Der halbe Flächeninhalt beträgt damit: A/2 = 27 FE.

III. Für eine reelle Zahl b mit: 0≤b≤3 liegt der Punkt P(b|27-3b^2) auf der Funktion $f(x) = 27 - 3x^2$. Die zur zur x-Achse parallele Gerade y = 27 – 3b^2 durch den Punkt P teilt folglich die Fläche zwischen Funktion f(x) und x-Achse im 1. Quadranten. Damit gilt hinsichtlich der Fläche zwischen Funktion und Gerade oberhalb der Gerade:

A/2 = $\int_0^b (f(x) - y)dx = \int_0^b \left((27 - 3x^2) - (27 - 3b^2)\right)dx = \int_0^b \left(-3x^2 + 3b^2\right)dx = \left[-x^3 + 3b^2 x\right]_0^b =$

$\left(-b^3 + 3b^3\right) - 0 = 2b^3$ = 27.

IV. Umstellen der Gleichung: $2b^3$ = 27 nach b ergibt:

$2b^3$ = 27 | :2

b^3 = 13,5 | $^3\sqrt{}$

b = $\sqrt[3]{13,5}$

V. Wir setzen den Wert b = $\sqrt[3]{13,5}$ ein in y = 27 – 3b^2 und erhalten die gesuchte Gleichung der zur x-Achse parallelen Geraden, die die Fläche zwischen Funktion f(x) und x-Achse im 1. Quadranten halbiert:

y = 27 – 3·($\sqrt[3]{13,5}$)^2 = 9,991065826 ≈ 9,991.

3. Lösung: I. Als Nullstelle(n) der Funktion f(x) berechnen wir:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow 27-3x^2=0 \Leftrightarrow 27=3x^2 \Leftrightarrow 9=x^2 \Leftrightarrow x=\pm 3$$

Die Nullstelle x = 3 dient als obere Grenze des noch zu bestimmenden Flächenintegrals. Wegen der Verortung der Fläche zwischen Funktion f(x) und x-Achse im 1. Quadranten ist die untere Grenze x = 0 des Integrationsbereichs durch die y-Achse gegeben.

II. Aus $f(x)=27-3x^2$ folgt zunächst als Stammfunktion: $F(x)=27x-x^3$. Wir berechnen dann das bestimmte (Flächen-) Integral:

A = $\int_0^3 (27-3x^2)dx = \left[27x-x^3\right]_0^3 = \left(27\cdot 3-3^3\right)-\left(27\cdot 0-0^3\right)$ = 54 FE.

Der halbe Flächeninhalt beträgt damit: A/2 = 27 FE.

III. Wir bilden die Umkehrfunktion zu y = $f(x)=27-3x^2$ und stellen nach Vertauschen der Variablen x und y nach y um:

$y=27-3x^2$ (Vertauschen x <-> y)

$x=27-3y^2$ | -27

$x-27=-3y^2$ | :(-3)

$-\frac{x}{3}+9=y^2$ | √

$\sqrt{-\frac{x}{3}+9}=y$.

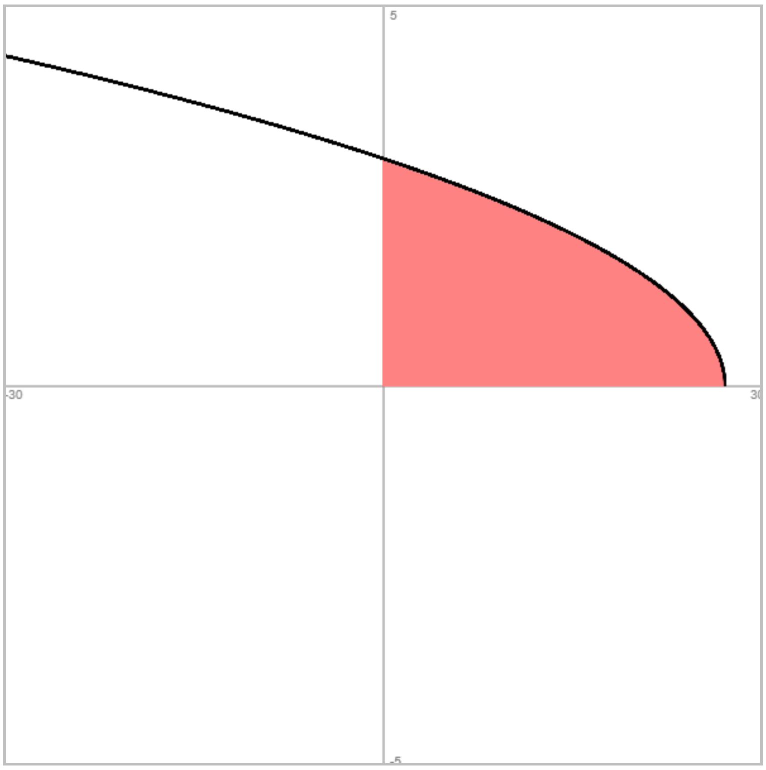
Die Umkehrfunktion lautet: $f^{-1}(x)=\sqrt{-\frac{x}{3}+9}$.

IV. Hinsichtlich der Umkehrfunktion gilt selbstverständlich (bei Invarianz des Flächeninhalts):

A = $\int_0^{27} f^{-1}(x)dx = \int_0^{27}\left(\sqrt{-\frac{x}{3}+9}\right)dx$ = 54 FE,

so dass sich eine reelle Zahl c mit: 0≤c≤27 ermitteln lässt, für die gilt:

A/2 = $\int_0^{c}\left(\sqrt{-\frac{x}{3}+9}\right)dx$ = 27.



V. Wir berechnen:

$$\int_0^c \left(\sqrt{-\frac{x}{3}+9}\right)dx = \int_0^c \left(-\frac{x}{3}+9\right)^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{1}{\frac{3}{2}}\left(-\frac{x}{3}+9\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{3}}\right]_0^c = \left[-2\left(-\frac{x}{3}+9\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^c =$$

$$-2\left(-\frac{c}{3}+9\right)^{\frac{3}{2}} + 2(-0+9)^{\frac{3}{2}} = 54 - 2\sqrt{-\frac{c}{3}+9}^{\,3}$$

und erhalten die nach c aufzulösende Gleichung:

$54 - 2\sqrt{-\frac{c}{3}+9}^{\,3}$ = 27 | -54

$-2\sqrt{-\frac{c}{3}+9}^{\,3}$ = -27 | :(-2)

$\sqrt{-\frac{c}{3}+9}^{\,3}$ = 13,5 | $\sqrt[3]{\ }$

$\sqrt{-\frac{c}{3}+9} = \sqrt[3]{13{,}5}$ | $()^2$

$-\frac{c}{3}+9 = (\sqrt[3]{13{,}5})^2$ | ·(-3)

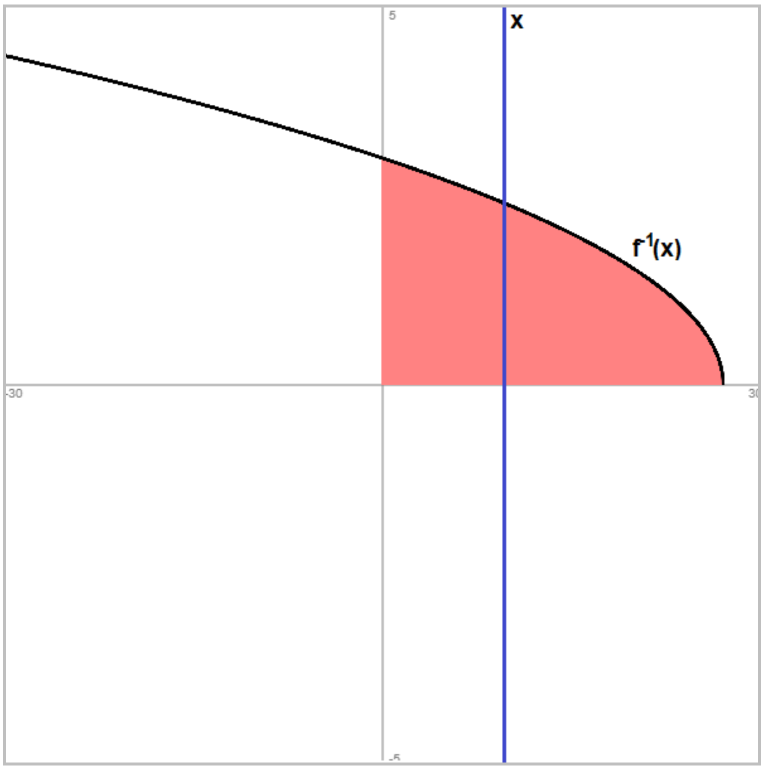
$c - 27 = -3 \cdot (\sqrt[3]{13{,}5})^2$ | +27

c = $27 - 3 \cdot (\sqrt[3]{13{,}5})^2$.

VI. Die zur y-Achse parallele Senkrechte x = c = 27 – 3·($\sqrt[3]{13{,}5}$)^2 = 9,991065826 halbiert damit die Fläche zwischen Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ und x-Achse im 1. Quadranten des Koordinatensystems. Es ist offensichtlich, dass dann die zur x-Achse parallele Gerade, die die Fläche zwischen Funktion f(x) und x-Achse im 1. Quadranten halbiert, die Gleichung:

$y = 27 - 3\cdot(\sqrt[3]{13{,}5}\,)^2 = 9{,}991065826 \approx 9{,}991$

erfüllt.



(FE = Flächeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 10.2023 / Aufgabe 1909