Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Flächenintegral

Aufgabe: Die Fläche zwischen der Funktion $f(x) = -x^2 + 9$ und der x-Achse ist zu bestimmen.

Lösung: I. Es gilt allgemein die folgende

Vorgehensweise:
Bestimmung der Nullstellen einer Funktion f(x): f(x) = 0 (auf einem Intervall [a; b]). (Intervallgrenzen und) Nullstellen sind: x_1, x_2, x_3, …
Bestimmung einer Stammfunktion F(x) zu f(x)
Errechnung der bestimmten Integrale als Teilflächen: $\pm A_1 = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = [F(x)]_{x_1}^{x_2}$, $\pm A_2 = \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx = [F(x)]_{x_2}^{x_3}$, …
Aufaddieren der Teilflächen zur Gesamtfläche: A = A_1 + A_2 + …

Fläche zwischen Funktion und x-Achse

II. Als <u>Nullstellen</u> berechnen wir:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3.$$

Die Nullstellen begrenzen als untere Grenze x = -3 und als obere Grenze x = 3 den Integrationsbereich des nun zu berechnenden bestimmten Integrals, das wiederum bei *zwei* Nullstellen für *eine* Fläche zwischen Funktion f(x) und x-Achse steht.

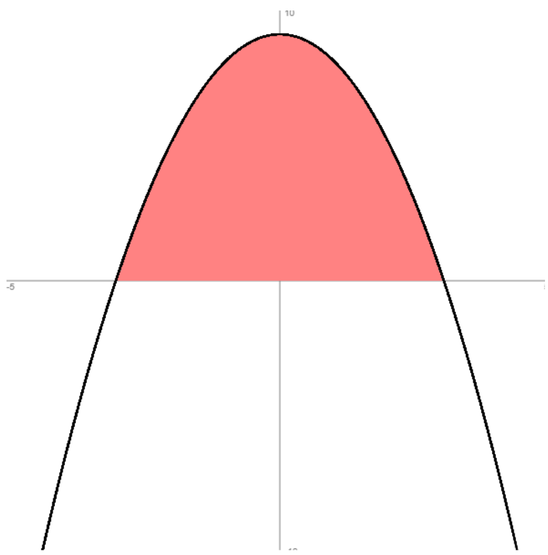
III. Aus $f(x) = -x^2 + 9$ folgt als <u>Stammfunktion</u>: $F(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 9x$. Das <u>bestimmte Integral</u> errechnet sich damit wie folgt (Integral, Stammfunktion, Einsetzen von oberer und unterer Grenze):

$$\int_{-3}^{3}\left(-x^2 + 9\right)dx = 2\int_{0}^{3}\left(-x^2 + 9\right)dx = 2 \cdot \left[-\frac{1}{3}x^3 + 9x\right]_{-3}^{3} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot 3^3 + 9 \cdot 3\right) - 2 \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot 0^3 + 9 \cdot 0\right) = .$$

$$2 \cdot (-9 + 27) - 0 = 36.$$

auch auf Grund der y-Achsensymmetrie der Funktion f(x). Da das bestimmte Integral positiv ist, ist sein Wert identisch mit dem <u>Flächeninhalt</u> der Fläche zwischen Funktion f(x) und x-Achse, also:

A = 36 FE.



(FE = Flächeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 12.2023 / Aufgabe 1931