Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Flächenintegral

Aufgabe: Gegeben sei die ganz rationale Funktion f(x) 3. Grades mit:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 32.$$

a) Zeige, dass x = -2 und x = 4 die einzigen Nullstellen der Funktion f(x) sind.

b) Die y-Achse im x-y-Koordinatensystem teilt die Fläche zwischen Funktion f(x) und x-Achse in zwei Teilflächen. Bestimme das Verhältnis der Teilflächeninhalte zueinander.

c) Bestimme die Gerade durch den Hochpunkt der Funktion f(x), die die Fläche zwischen Funktion f(x) und x-Achse in zwei gleichgroße Hälften teilt.

Lösung: a) I. Wir weisen zunächst x = -2 und x = 4 als Nullstellen der Funktion f(x) durch Einsetzen nach:

x = -2: $f(-2) = (-2)^3 – 6\cdot(-2)^2 + 32 = -8 – 24 + 32 = 0$
x = 4: $f(4) = 4^3 – 6\cdot4^2 + 32 = 64 – 96 + 32 = 0$.

II. Es gibt darüber hinaus keine weitere von x = -2 und x = 4 verschiedene Nullstelle von f(x). Untersuchen wir nämlich die Funktion f(x) auf Extrempunkte, so ergeben sich wegen der Ableitungen: $f'(x) = 3x^2 - 12x$, $f''(x) = 6x - 12$ und auf Grund von:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2-12x = 0 \Leftrightarrow x(3x-12) = 0 \Leftrightarrow x = 0, 3x-12 = 0 \Leftrightarrow x = 0, 3x = 12 \Leftrightarrow x = 0, x = 4$

und:

$f''(0) = -12 < 0$, $f''(4) = 12 > 0$

ein Hochpunkt H(0|32) an der Stelle x = 0 und ein Tiefpunkt an der Stelle x = 4. Die Nullstelle x = 4 ist somit der Tiefpunkt T(4|0) der Funktion und damit als Berührpunkt der x-Achse eine zweifache Nullstelle. Die Nullstelle x = -2 ist einfach, die Summe der Nullstellenvielfachheiten beträgt damit 2 + 1 = 3 und ist identisch mit dem Grad der ganz rationalen Funktion. Daher sind nur x = -2 und x = 4 Nullstellen der Funktion f(x).

b) I. Die Nullstellen begrenzen als untere Grenze x = -2 und als obere Grenze x = 4 den Integrationsbereich für die Fläche zwischen Funktion f(x) und x-Achse. Die Fläche befindet sich wegen des Hochpunktes H(0|32) oberhalb der x-Achse und wird wegen x = -2 < 0 und x = 4 > 0 durch die y-Achse in zwei Teilflächen zerlegt.

II. Wir berechnen die Flächeninhalte der beiden Teilflächen, indem wir zunächst uns um eine Stammfunktion F(x) der Funktion f(x) kümmern. Es folgt:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 32 \;\Rightarrow\; F(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 32x.$$

Hinsichtlich der Teilflächen A_1 (im 2. Quadranten des Koordinatensystems), A_2 (im 1. Quadranten) gilt:

$$A_1 = \int_{-2}^{0}(x^3 - 6x^2 + 32)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 32x\right]_{-2}^{0} = \left(\frac{1}{4}\cdot 0^4 - 2\cdot 0^3 + 32\cdot 0\right) - \left(\frac{1}{4}\cdot(-2)^4 - 2\cdot(-2)^3 + 32\cdot(-2)\right)$$

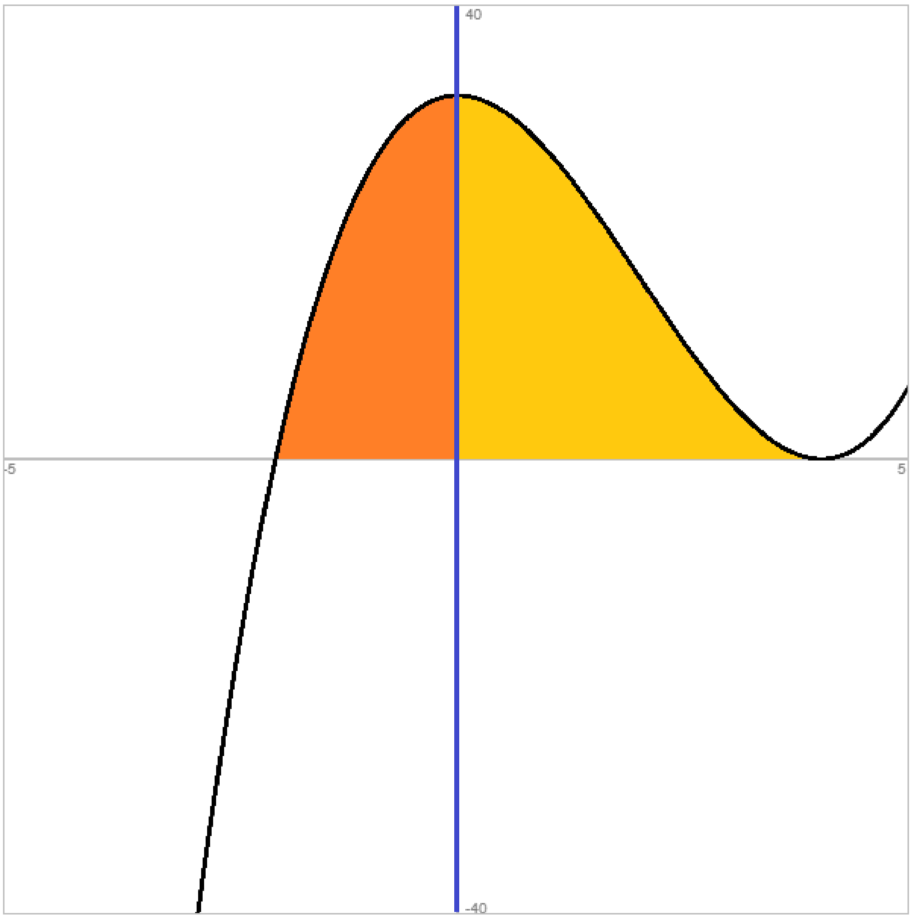
$$= 0 – (-44) = 44 \text{ FE}$$

$A_2 = \int_0^4 (x^3 - 6x^2 + 32)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 32x\right]_0^4 = \left(\frac{1}{4}\cdot 4^4 - 2\cdot 4^3 + 32\cdot 4\right) - \left(\frac{1}{4}\cdot 0^4 - 2\cdot 0^3 + 32\cdot 0\right)$

= 64 – 0 = 64 FE.

III. Das Verhältnis der Teilflächeninhalte beträgt dann:

$A_1 : A_2$ = 44:64 = 11:16.



c) I. Der Flächeninhalt der von Funktion f(x) und x-Achse eingeschlossenen Gesamtfläche A beträgt:

$A = A_1 + A_2$ = 44 + 64 = 108 FE.

Die Hälfte des Gesamtflächeninhalts ist somit:

A/2 = 108/2 = 54 FE.

II. Betrachten wir die Teilfläche A_1 = 44 FE, so fehlt gegenüber der halben Gesamtfläche A/2 ein Flächeninhalt in Höhe von 54 – 44 = 10 FE. Die Gerade g: y = mx + c, die die Gesamtfläche A in zwei gleichgroße Hälften teilt, muss damit im 1. Quadranten des Koordinatensystems zusammen mit den Achsen ein rechtwinkliges Dreieck mit Flächeninhalt A_D = 10 FE bilden. Die Ecken dieses Dreiecks sind der Koordinatenursprung O(0|0), der Hochpunkt H(0|32) als y-Achsenabschnittspunkt und eine Nullstelle $N(x_N|0)$ als x-Achsenabschnittspunkt. Wegen A_D = gh/2 mit g als Grundseite und h als Höhe ergibt sich wegen h = 32 (y-Achse):

A_D = gh/2 ⇔ 10 = g·32/2 ⇔ 10 = 16g ⇔ g = 10/16 = 5/8.

Die Länge der Grundseite ist identisch mit der x-Koordinate der Nullstelle der Geraden g, also:

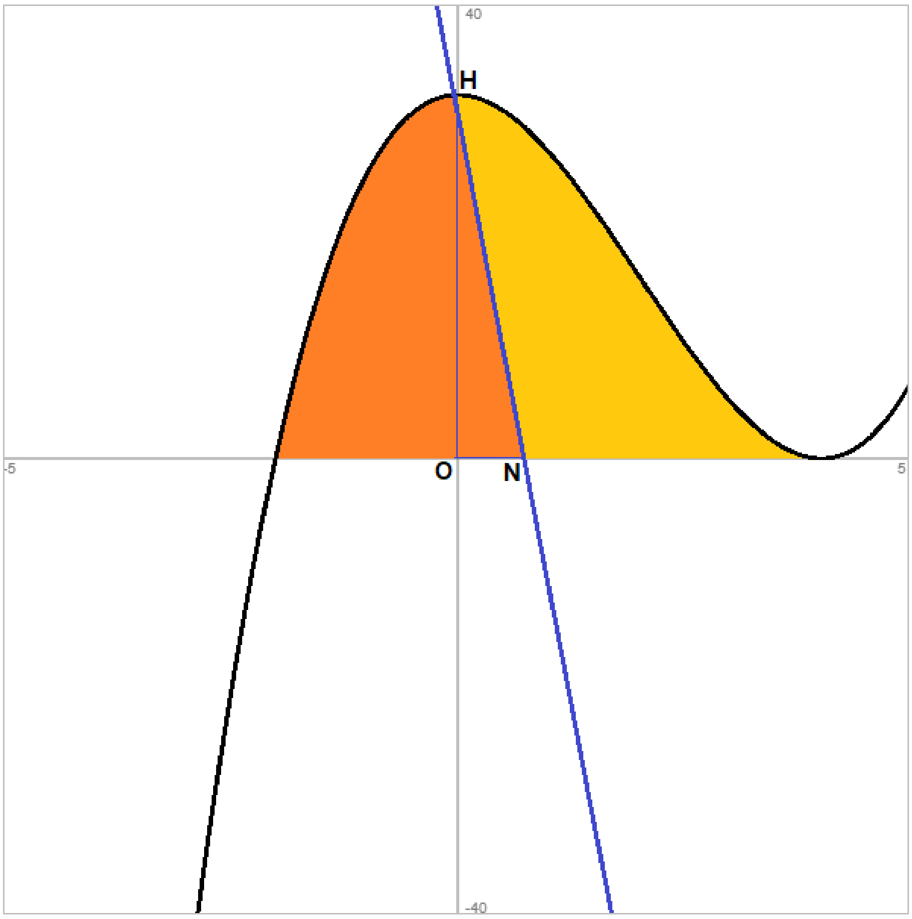
x_N = 5/8 = 0,625.

Die Ecken des Dreiecks sind damit: O(0|0), H(0|32), N(0,625|0).

III. Die Gerade g: y = mx + c, die die Gesamtfläche A in zwei gleichgroße Hälften teilt, verläuft damit durch die Punkte H(0|32) und N(0,625|0). Wegen des y-Achsenabschnittspunkts H(0|32) ist c = 32 der y-Achsenabschnitt der Geraden, die Steigung m errechnet sich aus beiden Punkten H(0|32) und N(0,625|0) als:

$$m = \frac{0-32}{0{,}625-0} = \frac{-32}{0{,}625} = -51{,}2.$$

Somit lautet die gesuchte Geradengleichung: g: y = -51,2·x + 32. Diese Gerade teilt die Gesamtfläche A in zwei gleichgroße Hälften.



(FE = Flächeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 03.2024 / Aufgabe 2032