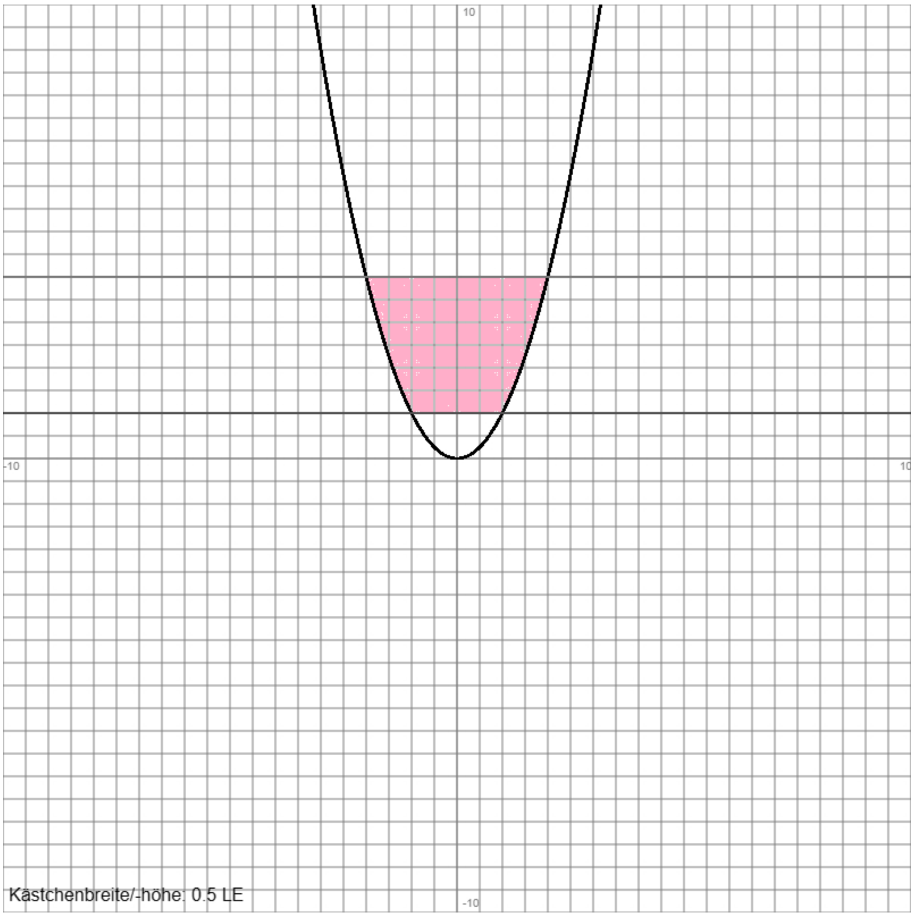
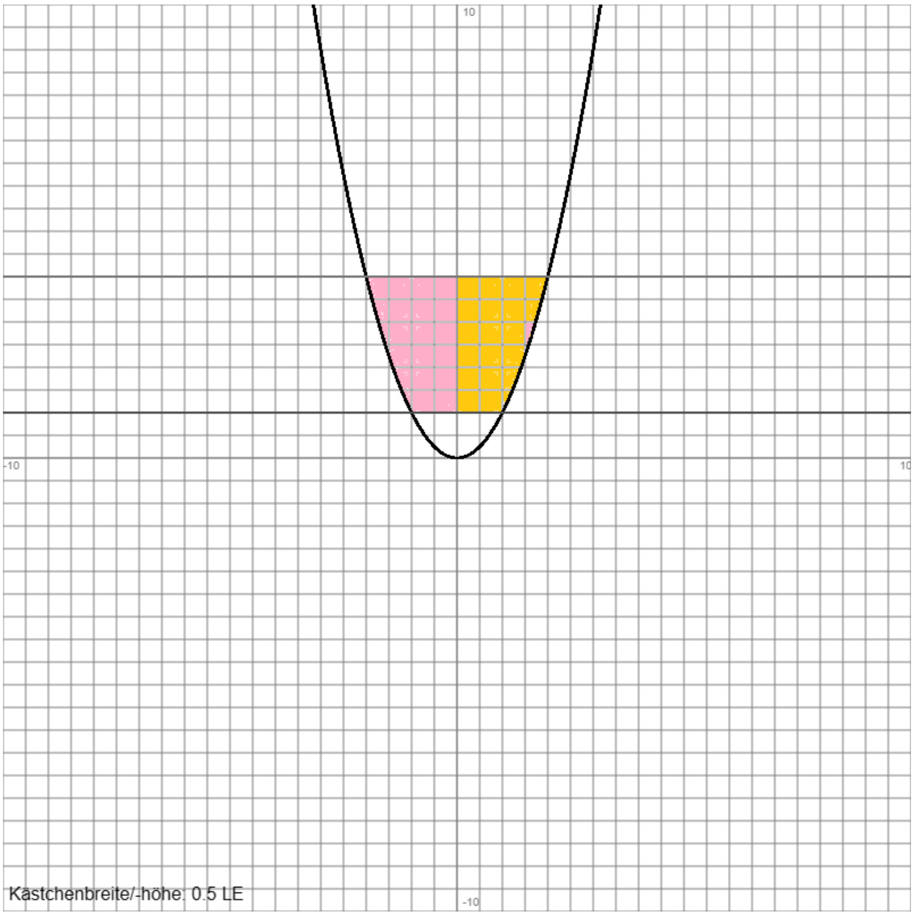
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Flächenintegral

Aufgabe: Zu berechnen ist der Flächeninhalt zwischen der Standardnormalparabel $f(x) = x^2$ und den Geraden y = 1 und y = 4.



Lösung: I. Zunächst kann wegen der y-Achsensymmetrie der quadratischen Funktion $f(x) = x^2$ von der Gleichheit beider Flächeninhalte A_1, A_2 der durch Funktion und Geraden begrenzten Flächen im 1. und 2. Quadranten des x-y-Koordinatensystems ausgegangen werden. Somit gilt für die Gesamtfläche: $A = A_1 + A_2 = 2A_1$. Wir betrachten daher im Folgenden nur den Inhalt A_1 der Fläche im 1. Quadranten:



II. Da die Berechnung des Flächeninhalts A_1, einer Fläche zwischen den drei Funktionen y = 4, $f(x) = x^2$, y = 1 einigermaßen komplex ist, wenn wir entlang der x-Achse zwecks Flächenberechnung zu integrieren haben (Schnittstellenberechnung, Integrale über Differenzen von Funktionen), entschließen wir uns zur Funktion $f(x) = x^2$ die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ zu bilden, die dann logischerweise zwischen x = 1 und x= 4 zu integrieren ist. Die Umkehrfunktion zu $f(x) = x^2$ bei x≥0 (steigende Monotonie von f(x) bei Umkehrbarkeit der Funktion) lässt sich bestimmen als:

$f(x) = x^2$

$y = x^2$ (Vertauschen von x und y)

$x = y^2$ | √

$\sqrt{x} = y$

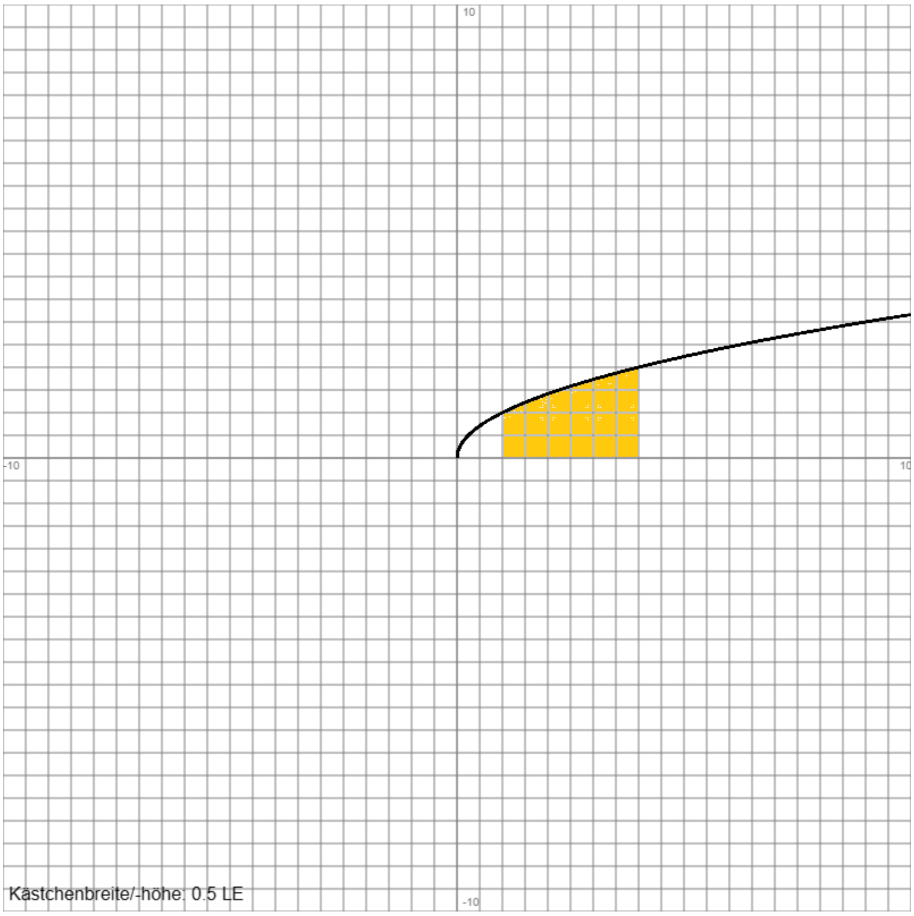
$\sqrt{x} = f^{-1}(x)$.

Es liegt damit die Quadratwurzelfunktion $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ als Umkehrfunktion zur, d.h. nach Spiegelung der Standardnormalparabel an der 1. Winkelhalbierenden y = x vor.

III. Die senkrechten Geraden x = 1 und x = 4 begrenzen auf Grund der Flächeninvarianz der Spiegelung eine Fläche zwischen Funktion $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ und x-Achse, die denselben Flächeninhalt A_1 hat. Wir integrieren:

$$A_1 = \int_1^4 \sqrt{x}dx = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}}dx = \left[\frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{2}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\cdot 1^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\cdot 8 - \frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{2}{3}\cdot 7 = \frac{14}{3} \text{ FE}$$

und haben damit den gesuchten Flächeninhalt erhalten.



IV. Der Teilflächeninhalt A_1 beträgt 14/3 FE, der gesuchte Flächeninhalt zwischen der Standardnormalparabel $f(x) = x^2$ und den Geraden y = 1 und y = 4 insgesamt errechnet sich nach dem eingangs Gesagten (I.) als:

$A = 2A_1 = 2 \cdot 14/3 = 28/3$ FE.

(FE = Flächeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 04.2024 / Aufgabe 2041