Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Flächenintegral

Aufgabe: Gegeben sind die Exponentialfunktionen $f(x) = 4 - 2e^x$ und $g(x) = 2e^{-x} - 1$.

a) Zeige, dass sich die Funktionen f(x) und g(x) auf der x-Achse des x-y-Koordinatensystems schneiden.

b) Bestimme die Asymptoten der Funktionen f(x) und g(x) sowie deren Schnittpunkte mit der y-Achse. Zeichne die Graphen.

c) Berechne den Inhalt der Fläche zwischen den beiden Funktionen f(x) und g(x) im 1. Quadranten des x-y-Koordinatensystems. Markiere die Fläche in der Zeichnung der Graphen.

Lösung: a) Wenn sich die Funktionen f(x) und g(x) auf der x-Achse des x-y-Koordinatensystems schneiden, müssen beide Funktionen die gleiche Nullstelle haben. Wir setzen daher f(x) = 0 und rechnen die Gleichung aus:

$f(x) = 0$

$4 - 2e^x = 0 \qquad | +2e^x$

$4 = 2e^x \qquad | :2$

$2 = e^x \qquad | \ln()$

$\ln(2) = x$

Die Nullstelle von f(x) ist also: x = ln(2) ≈ 0,69. Wir setzen diese in die Funktion g(x) ein und erhalten:

$g(\ln(2)) = 2e^{-\ln(2)} - 1 = 2e^{\ln(0,5)} - 1 = 2\cdot 0,5 - 1 = 1 - 1 = 0$,

so dass x = ln(2) auch Nullstelle von g(x) ist. D.h. aber: Die Funktionen f(x) und g(x) schneiden sich wegen f(ln(2)) = g(ln(2)) = 0 auf der x-Achse; der Schnittpunkt lautet: S(ln(2)|0).

b) I. Beide Exponentialfunktionen f(x) und g(x) besitzen waagerechte Asymptoten, und zwar gilt wegen der Vorzeichen der Exponenten in den e-Funktionen:

x -> -∞: f(x) -> 4 – 0 = 4 = y (waagerechte Asymptote)
x -> +∞: g(x) -> 0 – 1 = -1 = y (waagerechte Asymptote).

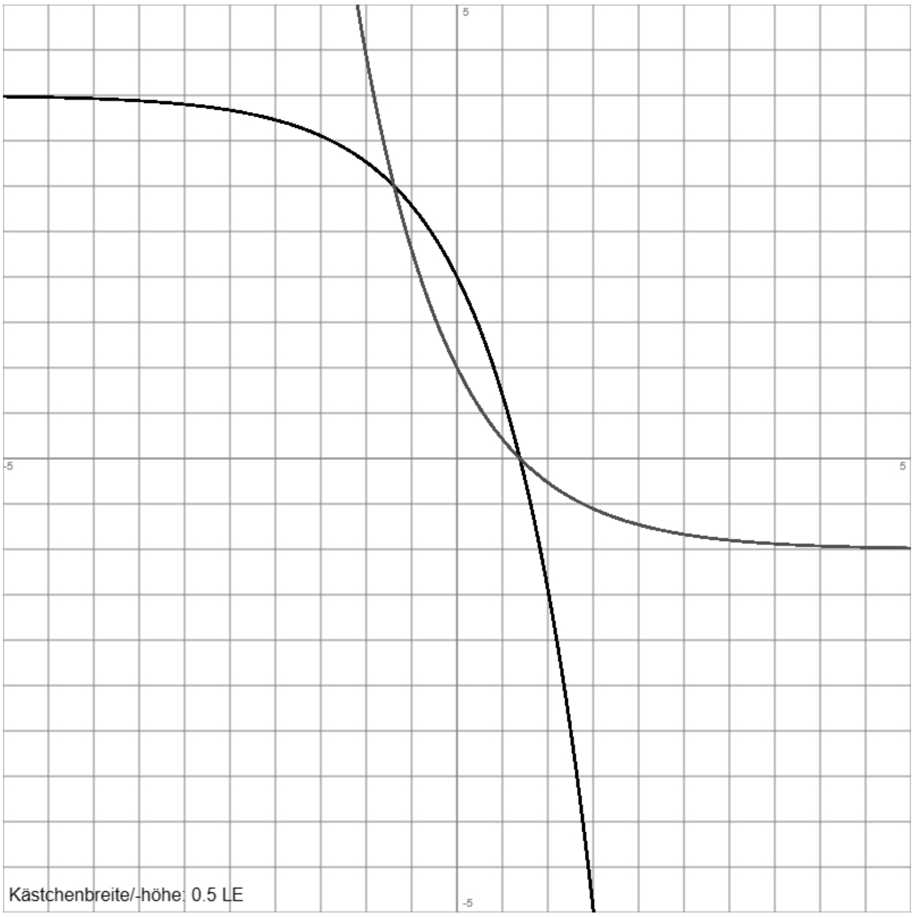
II. Die Schnittpunkte mit der y-Achse, also die y-Achsenabschnittspunkte der Funktionen f(x) und g(x) erhalten wir durch Einsetzen von x = 0 in die jeweilige Funktionsgleichung, also:

$f(0) = 4 - 2e^0 = 4 - 2 = 2 \rightarrow S_{yf}(0|2)$
$g(0) = 2e^{-0} - 1 = 2 - 1 = 1 \rightarrow S_{yg}(0|1)$.

III. Als Wertetabelle für die Funktionen f(x) und g(x) ergibt sich im Intervall [-5; 5] (bei Schrittweite 1 und mit Nullstelle/Schnittstelle S(ln(2)|0)):

x	f(x)	g(x)
-5	3.9865	295.8263
-4	3.9634	108.1963
-3	3.9004	39.1711
-2	3.7293	13.7781
-1	3.2642	4.4366
0	2	1
ln(2)	0	0
1	-1.4366	-0.2642
2	-10.7781	-0.7293
3	-36.1711	-0.9004
4	-105.1963	-0.9634
5	-292.8263	-0.9865

IV. Die Graphen der Funktion haben dann das folgende Aussehen:



c) Es ist ein Flächenintegral zu berechnen. Da die Fläche zwischen den Funktionen f(x) und g(x) im 1. Quadranten liegen soll, sind wegen der Schnittstelle S(ln(2)|0) als Nullstelle (gemäß a)) als Integralgrenzen x = 0 und x = ln(2) festzulegen. Wir bilden zudem (gemäß b)) die Differenzfunktion h(x) = f(x) – g(x) (mit f(x) ≥ g(x) für 0≤x≤ln(2)) und haben:

$h(x) = (4 - 2e^x) - (2e^{-x} - 1) = 4 - 2e^x - 2e^{-x} + 1 = 5 - 2e^x - 2e^{-x}$.

Integration führt auf eine Stammfunktion H(x) vermöge:

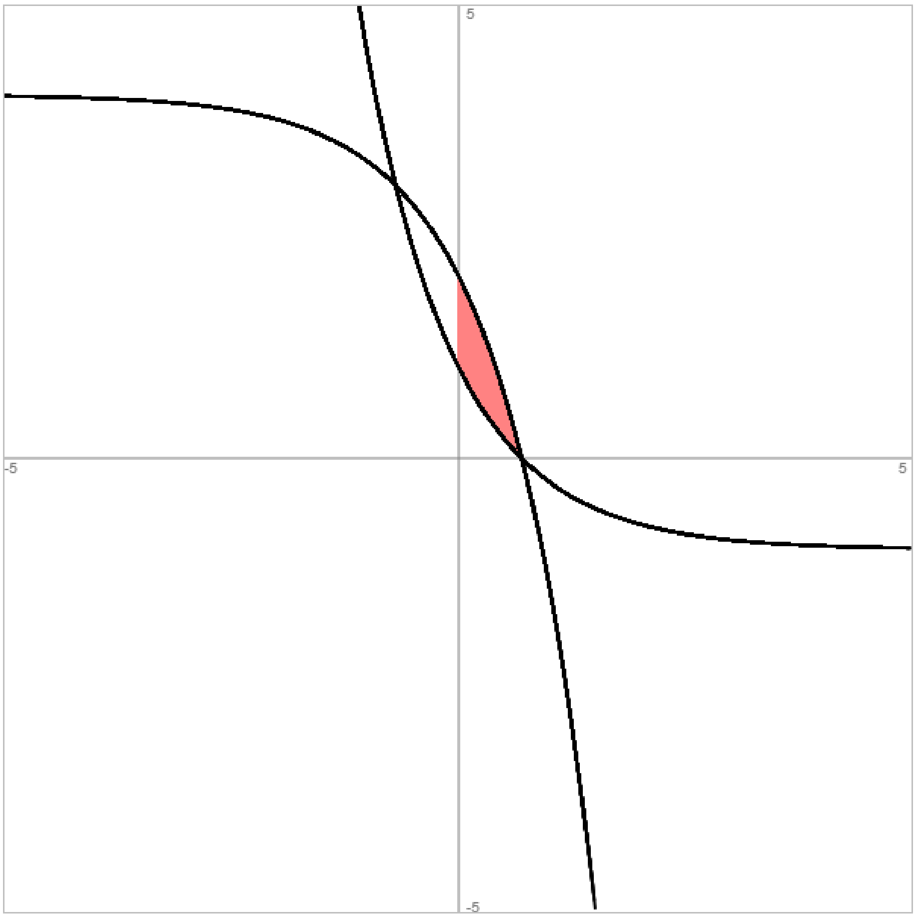
$H(x) = 5x - 2e^x - 2e^{-x}/(-1) = 5x - 2e^x + 2e^{-x}$, mit der wir das Flächenintegral bestimmen:

$$\int_0^{\ln(2)} (5-2e^x-2e^{-x})dx = \left[5x-2e^x+2e^{-x}\right]_0^{\ln(2)} = \left(5\ln(2)-2e^{\ln(2)}+2e^{-\ln(2)}\right)-\left(5\cdot 0-2e^0+2e^{-0}\right)=$$

$$\left(5\ln(2)-2\cdot 2+2\cdot 0{,}5\right)-\left(5\cdot 0-2+2\right)=5\ln(2)-3-0=5\ln(2)-3\approx 0{,}4657.$$

Der Flächeninhalt der Fläche zwischen den Funktionen f(x) und g(x) auf dem Intervall [0; ln(2)] beträgt damit:

A = 0,4657 FE.



(FE = Flächeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 05.2024 / Aufgabe 2046