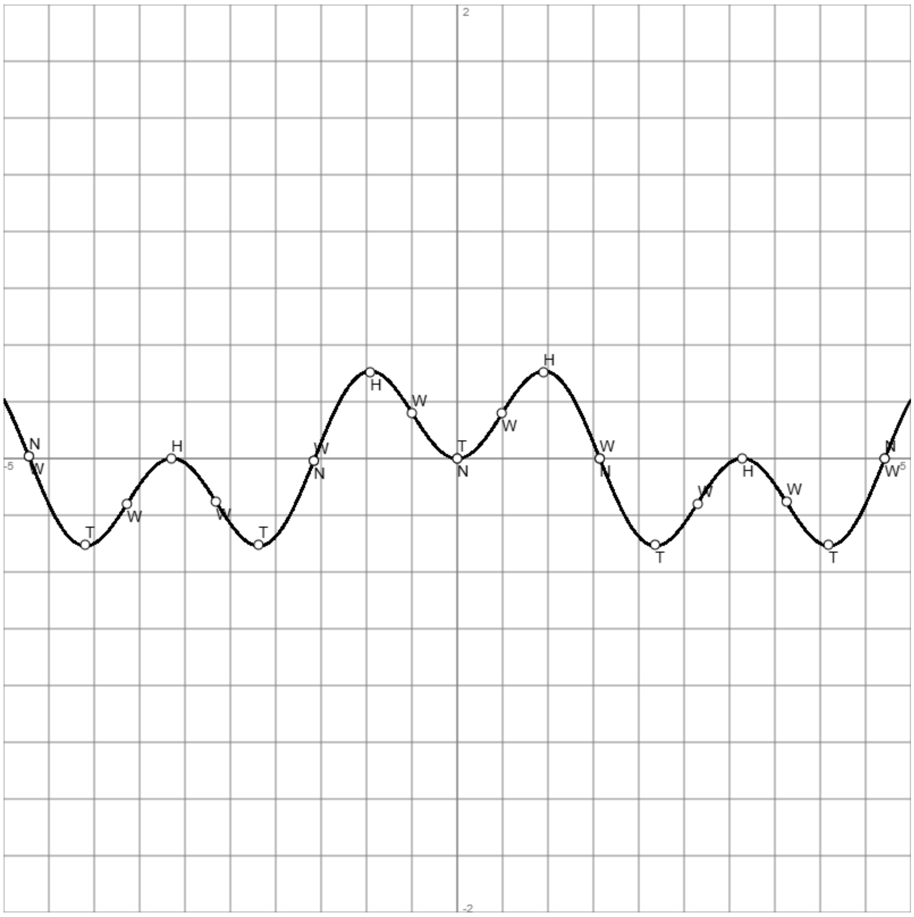
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Flächenintegral

Aufgabe: Gegeben ist die trigonometrische Funktion $f(x) = \sin^2(x)\cos(x)$.



a) Bestimme alle Nullstellen der Funktion.

b) Bestimme alle Extrempunkte der Funktion.

c) Begründe, dass der Flächeninhalt zwischen Funktion f(x) und x-Achse des x-y-Koordinatensystems zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen der gleiche ist. Berechne diesen Flächeninhalt.

Lösung: a) Zur Bestimmung der Nullstellen der Funktion setzen wir f(x) = 0 und rechnen die Gleichung aus:

$f(x) = 0$
$\sin^2(x)\cos(x) = 0$ (Satz vom Nullprodukt)
$\sin^2(x) = 0, \cos(x) = 0$ | $\sqrt{\ }$
$\sin(x) = 0, \cos(x) = 0$
$x = k\pi, x = (2k+1)\cdot\pi/2$
$x = k\cdot\pi/2$, k ganzzahlig

Nullstellen von f(x) liegen also bei allen Vielfachen von π/2 vor.

b) I. Bei der Bestimmung der 1. und 2. Ableitung wenden wir die Kettenregel an und formen dazu gemäß der Beziehung $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ die Funktionsterme f(x) und f'(x) um:

$f(x) = \sin^2(x)\cos(x) = (1-\cos^2(x))\cos(x) = \cos(x) - \cos^3(x)$

$f'(x) = -\sin(x) - 3\cos^2(x)(-\sin(x)) = -\sin(x) + 3\cos^2(x)\sin(x) = \sin(x)(-1+3\cos^2(x)) =$

$\sin(x)(-1+3(1-\sin^2(x))) = \sin(x)(-1+3-3\sin^2(x)) = \sin(x)(2-3\sin^2(x)) = 2\sin(x) - 3\sin^3(x)$

$f''(x) = 2\cos(x) - 9\sin^2(x)\cos(x) = \cos(x)(2-9\sin^2(x))$.

II. Die Ableitungen werden zur Berechnung der Extrempunkte benötigt. Dazu setzen wir die 1. Ableitung gleich null:

$f'(x) = 0$

$\sin(x)(2-3\sin^2(x)) = 0$ (Satz vom Nullprodukt)

$\sin(x) = 0,\ 2-3\sin^2(x) = 0$ | $+3\sin^2(x)$

$\sin(x) = 0,\ 2 = 3\sin^2(x)$ | :3

$\sin(x) = 0,\ 2/3 = \sin^2(x)$ | √

$\sin(x) = 0,\ \sin(x) = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

x = kπ, x = -2,1863 + 2kπ, x = -0,9553+2kπ, x = 0,9553+2kπ, x = 2,1863 + 2kπ, k ganzzahlig

Einsetzen der gefundenen x-Werte in die 2. Ableitung führt auf:

$f''(k\pi) = \cos(k\pi)(2-9\sin^2(k\pi)) = \pm1\cdot2 = \pm2$ mit:

f'(kπ) = 2 > 0 und Tiefpunkt T(kπ|0) bei geradem k

f'(kπ) = -2 < 0 und Hochpunkt H(kπ|0) bei ungeradem k

$f''(-2{,}1863+2k\pi) = \cos(-2{,}1863+2k\pi)(2-9\sin^2(-2{,}1863+2k\pi)) = \cos(-2{,}1863)(2-9\sin^2(-2{,}1863)) =$

$-\sqrt{\frac{1}{3}}\ (2-9\cdot2/3) = -\sqrt{\frac{1}{3}}(-4) = 4\sqrt{\frac{1}{3}} > 0$ mit Tiefpunkt $T(-2{,}1863+2k\pi|-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}})$

$f''(-0{,}9553+2k\pi) = \cos(-0{,}9553+2k\pi)(2-9\sin^2(-0{,}9553+2k\pi)) = \cos(-0{,}9553)(2-9\sin^2(-0{,}9553)) =$

$\sqrt{\frac{1}{3}}\ (2-9\cdot2/3) = \sqrt{\frac{1}{3}}(-4) = -4\sqrt{\frac{1}{3}} < 0$ mit Hochpunkt $H(-0{,}9553+2k\pi|\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}})$

$f''(0{,}9553+2k\pi) = \cos(0{,}9553+2k\pi)(2-9\sin^2(0{,}9553+2k\pi)) = \cos(0{,}9553)(2-9\sin^2(0{,}9553)) =$

$\sqrt{\frac{1}{3}}\ (2-9\cdot2/3) = \sqrt{\frac{1}{3}}(-4) = -4\sqrt{\frac{1}{3}} < 0$ mit Hochpunkt $H(0{,}9553+2k\pi|\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}})$

$f''(2{,}1863+2k\pi) = \cos(2{,}1863+2k\pi)(2-9\sin^2(2{,}1863+2k\pi)) = \cos(2{,}1863)(2-9\sin^2(2{,}1863)) =$

$-\sqrt{\frac{1}{3}}\ (2-9\cdot2/3) = -\sqrt{\frac{1}{3}}(-4) = 4\sqrt{\frac{1}{3}} > 0$ mit Tiefpunkt $T(2{,}1863+2k\pi|-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}})$.

Damit sind alle Extrempunkte der Funktion f(x) bestimmt.

c) I. Die Periodizität von f(x) ist: p = 2π. Zudem ist die Funktion symmetrisch zur y-Achse des x-y-Koordinatensystems und symmetrisch zu jedem Wendepunkt von f(x), sofern dieser eine Nullstelle der Funktion ist. Aus all dem folgt, dass der Flächeninhalt zwischen Funktion f(x) und x-Achse zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen immer der gleiche ist. Es genügt daher, etwa den Inhalt der Fläche über dem Intervall [0; π/2] auszurechnen, was im Folgenden auch geschieht.

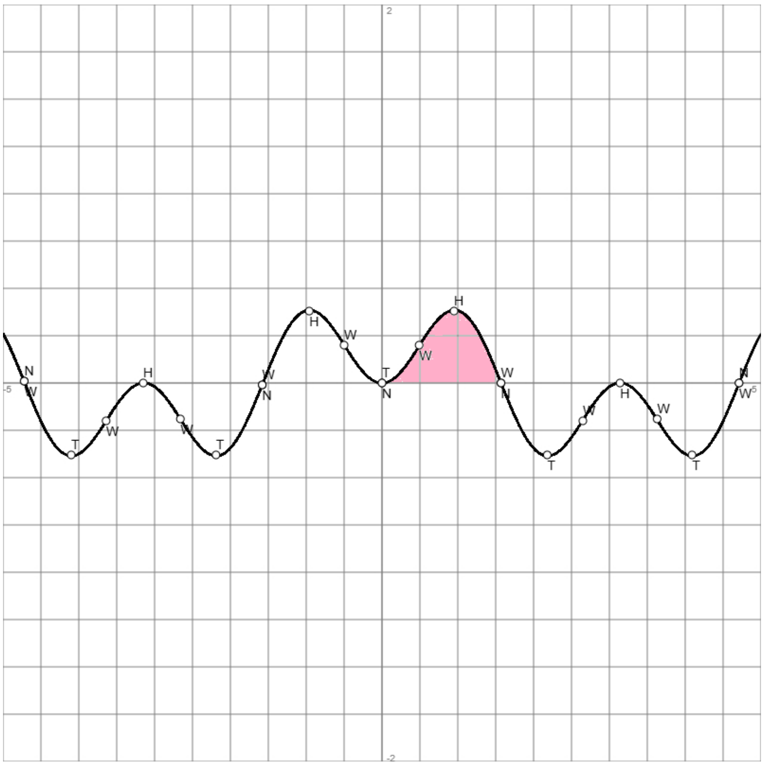
II. Es gilt für das unbestimmte Integral unter Verwendung der Substitutionsregel für das Integrieren:

$$\int \sin^2(x)\cos(x)dx \underset{\substack{u=\sin(x)\\ du=\cos(x)dx}}{=} \int u^2 du = \frac{1}{3}u^3 + C \underset{\sin(x)=u}{=} \frac{1}{3}\sin^3(x) + C.$$

III. Der gesuchte Flächeninhalt A errechnet sich nun als:

A = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)dx = \left[\frac{1}{3}\sin^3(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}\sin^3(\frac{\pi}{2}) - \frac{1}{3}\sin^3(0) = \frac{1}{3}\cdot 1 - \frac{1}{3}\cdot 0 = \frac{1}{3}$ FE.

Die errechnete Fläche zwischen Funktion und x-Achse hat dann das folgende Aussehen:



(FE = Flächeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 10.2024 / Aufgabe 2252