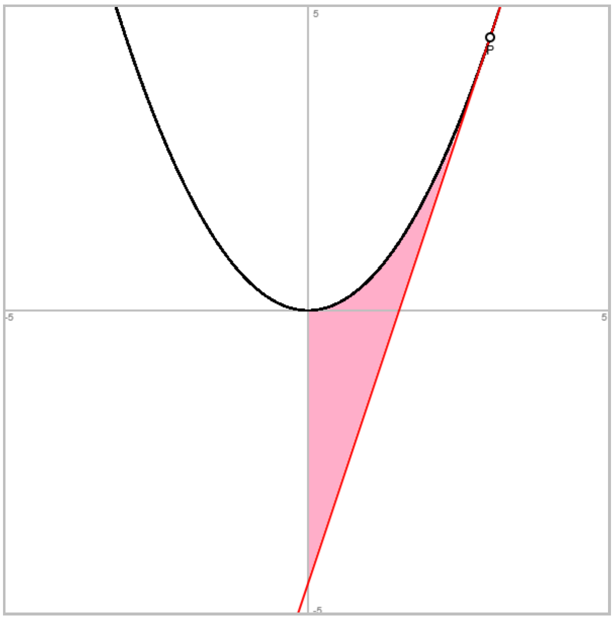
Michael Buhlmann

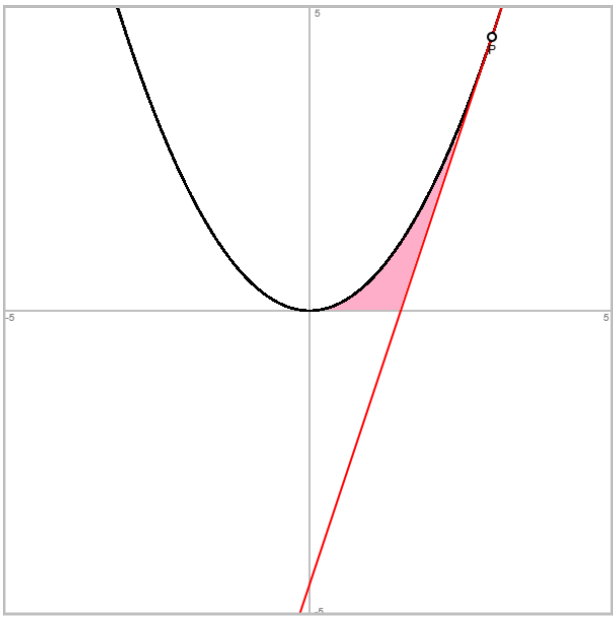
Mathematikaufgaben
> Analysis
> Flächenintegral

Aufgabe: Zur Funktion $f(x) = 0{,}5x^2$ wird an der Stelle $x_0 = 3$ die Tangente t an f(x) gebildet.

a) Berechne die von Funktion, Tangente und y-Achse eingeschlossene Fläche.



b) Berechne die von Funktion, Tangente und x-Achse eingeschlossene Fläche.



Lösung: I. Wir bestimmen die Tangentengleichung an der Stelle $x_0 = 3$ zur Funktion $f(x) = 0{,}5x^2$ mit der Tangentenformel:

t: $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$, d.h.: t: $y = f'(3)(x-3) + f(3)$, indem wir unter Bildung der 1. Ableitung f'(x) = 2·0,5x = x errechnen:

$f(x) = 0{,}5x^2 \Rightarrow f(3) = 0{,}5\cdot 3^2 = 4{,}5$

$f'(x) = x \Rightarrow f'(3) = 3$.

Eingesetzt in die Tangentenformel y = f'(3)(x-3) + f(3), ergibt sich:

t: y = 3(x-3) + 4,5 = 3x – 9 + 4,5 = 3x – 4,5

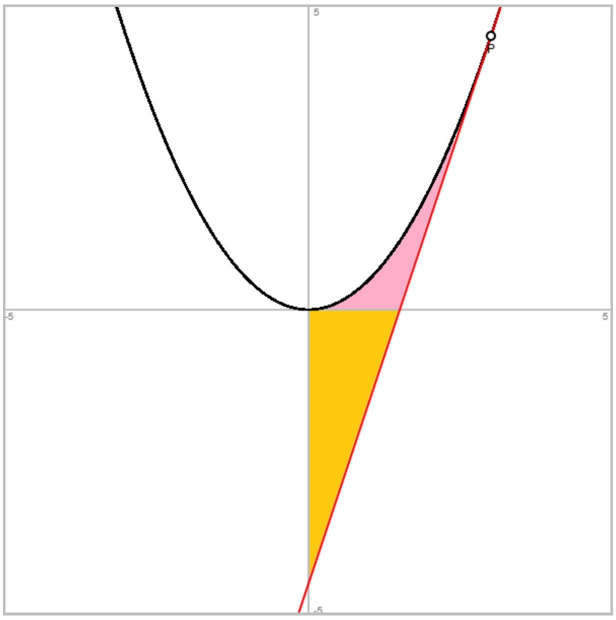
als Tangentengleichung.

II. a) Die von Funktion, Tangente und y-Achse eingeschlossene Fläche A_1 ist die Differenzfläche zwischen Funktion f(x) und Tangente t im Intervall [0; 3]. Es gilt damit:

$$A_1 = \int_0^3 (0{,}5x^2 - (3x - 4{,}5))dx = \int_0^3 (0{,}5x^2 - 3x + 4{,}5)dx = \left[\frac{1}{6}x^3 - 1{,}5x^2 + 4{,}5x\right]_0^3 =$$

$$\frac{1}{6}\cdot 3^3 - 1{,}5\cdot 3^2 + 4{,}5\cdot 3 - 0 = 4{,}5 \text{ FE.}$$

b) Die von Funktion, Tangente und x-Achse eingeschlossene Fläche A_2 errechnet sich mit Hilfe des schon ermittelten Flächeninhalts A_1, indem wir von A_1 den Flächeninhalt des Dreiecks A_Δ abziehen, das zwischen x-, y-Achse und Tangente t im 4. Quadranten des x-y-Koordinatensystems liegt.



Dazu ist die Nullstelle der Tangente auszurechnen:

t: y = 3x – 4,5 = 0 ⇔ 3x = 4,5 ⇔ x = 1,5.

Grundseite des Dreiecks (entlang der x-Achse) ist also: g = 1,5 LE. Die Dreieckshöhe (entlang der y-Achse) ist y-Achsenabschnitt der Tangente: h = 4,5 LE. Der Flächeninhalt des Dreiecks beläuft sich damit auf:

$$A_\Delta = \frac{1}{2}gh = \frac{1}{2}\cdot 1{,}5\cdot 4{,}5 = 3{,}375 \text{ FE.}$$

Der Flächeninhalt A_2 bestimmt sich schließlich als:

$A_2 = A_1 - A_\Delta = 4{,}5 - 3{,}375 = 1{,}125$ FE.

(FE = Flächeneinheiten, LE = Längeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 10.2024 / Aufgabe 2255