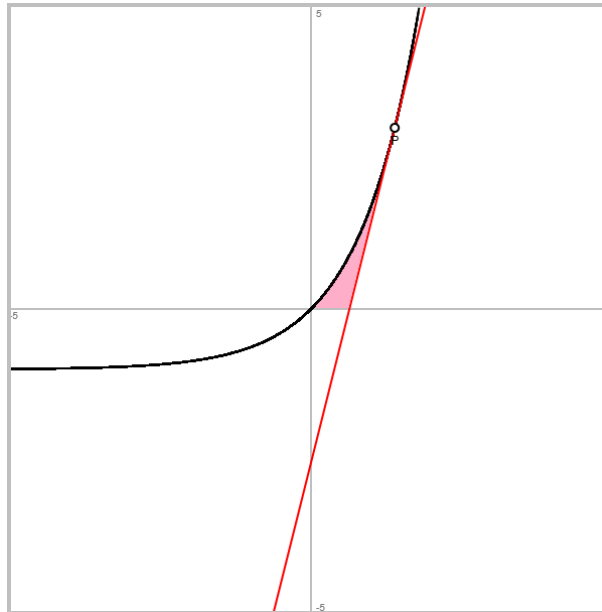


Mathematikaufgaben

> Analysis

> Flächenintegral

Aufgabe: Zur Funktion $f(x) = e^x - 1$ wird an der Stelle $x_0 = \ln(4)$ die Tangente t an $f(x)$ gebildet. Berechne die von Funktion, Tangente und x -Achse eingeschlossene Fläche.



Lösung: I. Die Tangentengleichung an der Stelle $x_0 = \ln(4)$ zur Funktion $f(x) = e^x - 1$ ergibt sich mit der Tangentenformel:

$$t: y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0), \text{ d.h.: } t: y = f'(\ln(4))(x-\ln(4)) + f(\ln(4)),$$

indem wir unter Bildung der 1. Ableitung $f'(x) = e^x$ errechnen:

$$f(x) = e^x - 1 \Rightarrow f(\ln(4)) = e^{\ln(4)} - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$f'(x) = e^x \Rightarrow f'(\ln(4)) = e^{\ln(4)} = 4.$$

Eingesetzt in die Tangentenformel $y = f'(\ln(4))(x-\ln(4)) + f(\ln(4))$, folgt:

$$t: y = 4(x-\ln(4)) + 3 = 4x - 4 \cdot \ln(4) + 3$$

als Tangentengleichung.

II. Wir verfolgen die nachstehende Vorgehensweise: Der Inhalt A der von Funktion, Tangente und x -Achse eingeschlossenen Fläche errechnet sich als Differenz des Flächeninhalts A_1 zwischen Funktion $f(x)$ und x -Achse auf dem Intervall $[0; \ln(4)]$ und des Flächeninhalts des Dreiecks A_Δ , das zwischen x -Achse, Tangente t und Senkrechten $x = \ln(4)$ im 1. Quadranten des x - y -Koordinatensystems liegt.

III. Wir bestimmen zunächst mit Hilfe der Integralrechnung den Flächeninhalt A_1 :

$$A_1 = \int_0^{\ln(4)} (e^x - 1) dx = [e^x - x]_0^{\ln(4)} = (e^{\ln(4)} - \ln(4)) - (e^0 - 0) = 4 - \ln(4) - 1 = 3 - \ln(4) \text{ FE.}$$



IV. Wir berechnen den Inhalt der Dreiecksfläche A_{Δ} . Dazu ist die Nullstelle der Tangente auszurechnen:

$$t: y = 4x - 4 \cdot \ln(4) + 3 = 0 \Leftrightarrow 4x = 4 \cdot \ln(4) - 3 \Leftrightarrow x = \ln(4) - 0,75.$$

Grundseite des Dreiecks (entlang der x-Achse) ist dann: $g = \ln(4) - (\ln(4) - 0,75) = 0,75$ LE. Die Dreieckshöhe ist: $h = f(\ln(4)) = 3$ LE. Der Flächeninhalt des Dreiecks beläuft sich damit auf:

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} gh = \frac{1}{2} \cdot 0,75 \cdot 3 = 1,125 \text{ FE.}$$

V. Der Flächeninhalt A bestimmt sich schließlich als Differenz der Flächeninhalte A_1 und A_{Δ} :

$$A = A_1 - A_{\Delta} = (3 - \ln(4)) - 1,125 = 1,875 - \ln(4) \approx 0,4887 \text{ FE.}$$

(FE = Flächeneinheiten, LE = Längeneinheiten)