

# Mathematikaufgaben

## > Folgen, Reihen

## > Grenzwerte von Folgen

---

**Aufgabe:** Berechne den Grenzwert der Folge:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{7}{n} - 8 - \frac{1}{n^2} \right).$$

**Lösung:** I. Eine Abbildung  $\{a_n\}: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ , die jeder natürlichen Zahl  $n$  eine reelle Zahl  $a_n$  zuordnet, heißt (unendliche) (Zahlen-) Folge:  $n \rightarrow a_n$  oder  $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ ,  $a_n$  das  $n$ -te Folgenglied. Mit  $a_n = f(n)$  definiert  $f$  die Funktionsvorschrift der Folge.

Eine Folge  $\{a_n\}$  heißt konvergent, d.h. besitzt einen Grenzwert (Limes)  $g$ , wenn (für jedes  $\varepsilon > 0$ ) in jeder noch so kleinen ( $\varepsilon$ -) Umgebung um  $g$  (dem offenen Intervall  $(g-\varepsilon, g+\varepsilon)$ ) ab einem gewissen  $n$  ( $= n(\varepsilon)$ ) alle Folgenglieder liegen. Dann gilt:  $g = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Eine Folge mit Grenzwert  $g = 0$  heißt Nullfolge;

die Folge  $a_n = \frac{1}{n}$  ist eine Nullfolge mit:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ . Falls alle Grenzwerte existieren, gelten

die folgenden Grenzwertsätze:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ;

$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^r = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^r$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f\left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)$  bei

stetigen reellwertigen Funktion  $f(x)$ , bei reellen  $c, r$  und für Folgen  $\{a_n\}, \{b_n\}$ .

II. Als gesuchter Grenzwert ergibt sich nach den Grenzwertsätzen und der Folge  $a_n = \frac{1}{n}$  als Nullfolge:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{7}{n} - 8 - \frac{1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} 8 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} 8 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 - 8 - 0 \cdot 0 = -8.$$