

Mathematikaufgaben

> Folgen, Reihen

> Grenzwerte von Folgen

Aufgabe: Berechne den Grenzwert der Folge:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{4}{n^2}\right)^4.$$

Lösung: I. Eine Abbildung $\{a_n\}: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$, die jeder natürlichen Zahl n eine reelle Zahl a_n zuordnet, heißt (unendliche) (Zahlen-) Folge: $n \rightarrow a_n$ oder $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, a_n das n -te Folgenglied. Mit $a_n = f(n)$ definiert f die Funktionsvorschrift der Folge.

Eine Folge $\{a_n\}$ heißt konvergent, d.h. besitzt einen Grenzwert (Limes) g , wenn (für jedes $\varepsilon > 0$) in jeder noch so kleinen (ε -) Umgebung um g (dem offenen Intervall $(g-\varepsilon, g+\varepsilon)$) ab einem gewissen n ($= n(\varepsilon)$) alle Folgenglieder liegen. Dann gilt: $g = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Eine Folge mit Grenzwert $g = 0$ heißt Nullfolge;

die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ ist eine Nullfolge mit: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Falls alle Grenzwerte existieren, gelten die folgenden Grenzwertsätze:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n;$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^r = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right)^r; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right) \quad \text{bei}$$

stetigen reellwertigen Funktion $f(x)$, bei reellen c, r und für Folgen $\{a_n\}, \{b_n\}$.

II. Als gesuchter Grenzwert ergibt sich nach den Grenzwertsätzen und mit den Folgen $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbf{N}}$,

$\left\{\frac{1}{n^2}\right\}_{n \in \mathbf{N}}$ als Nullfolgen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{4}{n^2}\right)^4 = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{4}{n^2}\right)\right)^4 = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^2}\right)^4 = (3 + 0)^4 = 81.$$