Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Folgen, Reihen
> Grenzwerte von Folgen

Aufgabe: Berechne den Grenzwert der Folge:

$$\lim_{n->\infty} \sqrt{1-\frac{1}{n}}\ .$$

Lösung: I. Eine Abbildung $\{a_n\}$: **N** -> **R**, die jeder natürlichen Zahl n eine reelle Zahl a_n zuordnet, heißt (unendliche) (Zahlen-) Folge: n -> a_n oder $\{a_n\}_{n\varepsilon \mathbf{N}}$, a_n das n-te Folgenglied. Mit a_n = f(n) definiert f die Funktionsvorschrift der Folge.
Eine Folge $\{a_n\}$ heißt konvergent, d.h. besitzt einen Grenzwert (Limes) g, wenn (für jedes ε>0) in jeder noch so kleinen (ε-) Umgebung um g (dem offenen Intervall (g-ε, g+ε)) ab einem gewissen n (= n(ε)) alle Folgenglieder liegen. Dann gilt: $g = \lim_{n->\infty} a_n$. Eine Folge mit Grenzwert g = 0 heißt Nullfolge; die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ ist eine Nullfolge mit: $\lim_{n->\infty} \frac{1}{n} = 0$. Falls alle Grenzwerte existieren, gelten die folgenden Grenzwertsätze: $\lim_{n->\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n->\infty} a_n + \lim_{n->\infty} b_n$; $\lim_{n->\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n->\infty} a_n$; $\lim_{n->\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n->\infty} a_n \cdot \lim_{n->\infty} b_n$; $\lim_{n->\infty}(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{\lim_{n->\infty} a_n}{\lim_{n->\infty} b_n}$; $\lim_{n->\infty} a_n^r = (\lim_{n->\infty} a_n)^r$; $\lim_{n->\infty} f(a_n) = f(\lim_{n->\infty} a_n)$ bei stetigen reellwertigen Funktion f(x), bei reellen c, r und für Folgen $\{a_n\}$, $\{b_n\}$.

II. Als gesuchter Grenzwert ergibt sich nach den Grenzwertsätzen und mit der Folgen $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in N}$ als Nullfolge:

$$\lim_{n->\infty} \sqrt{1-\frac{1}{n}} = \sqrt{\lim_{n->\infty}(1-\frac{1}{n})} = \sqrt{\lim_{n->\infty} 1 - \lim_{n->\infty} \frac{1}{n}} = \sqrt{1-0} = 1.$$

www.michael-buhlmann.de / 11.2020 / Aufgabe 1190