Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Folgen, Reihen
> Grenzwerte von Folgen

Aufgabe: Berechne den Grenzwert der Folge:

$$\lim_{n->\infty}\left(1-\frac{3}{20-n}\right)^{3n}.$$

Lösung: I. Eine Abbildung $\{a_n\}$: **N** -> **R**, die jeder natürlichen Zahl *n* eine reelle Zahl a_n zuordnet, heißt (unendliche) (Zahlen-) Folge: *n* -> a_n oder $\{a_n\}_{n\varepsilon\mathbf{N}}$, a_n das n-te Folgenglied. Mit a_n = f(*n*) definiert f die Funktionsvorschrift der Folge.
Eine Folge $\{a_n\}$ heißt konvergent, d.h. besitzt einen Grenzwert (Limes) g, wenn (für jedes ε>0) in jeder noch so kleinen (ε-) Umgebung um g (dem offenen Intervall (g-ε, g+ε)) ab einem gewissen n (= n(ε)) alle Folgenglieder liegen. Dann gilt: $g=\lim_{n->\infty}a_n$. Eine Folge mit Grenzwert g = 0 heißt Nullfolge; die Folge $a_n=\frac{1}{n}$ ist eine Nullfolge mit: $\lim_{n->\infty}\frac{1}{n}=0$. Falls alle Grenzwerte existieren, gelten die folgenden Grenzwertsätze: $\lim_{n->\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n->\infty}a_n+\lim_{n->\infty}b_n$; $\lim_{n->\infty}(c\cdot a_n)=c\cdot\lim_{n->\infty}a_n$; $\lim_{n->\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim_{n->\infty}a_n\cdot\lim_{n->\infty}b_n$; $\lim_{n->\infty}(\frac{a_n}{b_n})=\frac{\lim_{n->\infty}a_n}{\lim_{n->\infty}b_n}$; $\lim_{n->\infty}a_n^r=(\lim_{n->\infty}a_n)^r$; $\lim_{n->\infty}f(a_n)=f(\lim_{n->\infty}a_n)$ bei stetigen reellwertigen Funktion f(x), bei reellen c, r und für Folgen $\{a_n\}$, $\{b_n\}$.

II. Die Eulersche Zahl e lässt sich vermöge eines Folgengrenzwertes als $e=\lim_{n->\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ darstellen. Hieraus ergibt sich weiter die Beziehung: $e^a=\lim_{n->\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$ (*) auf Grund der Überlegung:

$$e^a=\left(\lim_{n->\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^a=\lim_{n->\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^a=\lim_{n->\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{na}=\lim_{n->\infty}\left(1+\frac{a}{na}\right)^{na}\underset{na=m}{=}\lim_{m->\infty}\left(1+\frac{a}{m}\right)^m.$$

III. Als gesuchter Grenzwert ergibt sich nach Umformungen, mit der Beziehung (*) und den Grenzwertsätzen:

$$\lim_{n->\infty}\left(1-\frac{3}{20-n}\right)^{3n}=\lim_{n->\infty}\left(1+\frac{3}{n+20}\right)^{3n}=\lim_{n->\infty}\left(\left(1+\frac{3}{n+20}\right)^n\right)^3=\left(\lim_{n->\infty}\left(1+\frac{3}{n+20}\right)^n\right)^3\underset{m=n+20}{=}$$

$$\left(\lim_{m->\infty}\left(1+\frac{3}{m}\right)^{m-20}\right)^3=\left(\lim_{m->\infty}\left(\left(1+\frac{3}{m}\right)^{-20}\cdot\left(1+\frac{3}{m}\right)^m\right)\right)^3=\left(\lim_{m->\infty}\left(1+\frac{3}{m}\right)^{-20}\cdot\lim_{m->\infty}\left(1+\frac{3}{m}\right)^m\right)^3=$$

$$\left(\left(1+\lim_{m->\infty}\frac{3}{m}\right)^{-20}\cdot\lim_{m->\infty}\left(1+\frac{3}{m}\right)^m\right)^3=\left((1+0)^{-20}\cdot e^3\right)^3=\left(1\cdot e^3\right)^3=\left(e^3\right)^3=e^9.$$

www.michael-buhlmann.de / 11.2020 / Aufgabe 1194