Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Folgen, Reihen
> Explizite Folge

Aufgabe: Bestimme für die Folge:

$$a_n = \frac{n^2 - 7n + 8}{4 + n + 2n^2}$$

den Grenzwert.

1. Lösung: I. Allgemein gelten die nachstehenden Grenzwertsätze für Folgen a_n, b_n und reelle Konstanten c:

$$\lim_{n->\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n->\infty} a_n + \lim_{n->\infty} b_n$$

$$\lim_{n->\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n->\infty} a_n$$

$$\lim_{n->\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n->\infty} a_n \cdot \lim_{n->\infty} b_n$$

$$\lim_{n->\infty}(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{\lim_{n->\infty} a_n}{\lim_{n->\infty} b_n}$$

$$\lim_{n->\infty} a_n^r = (\lim_{n->\infty} a_n)^r$$

II. Anwendung der obigen Grenzwertsätze führt zu:

$$\lim_{n->\infty} \frac{n^2 - 7n + 8}{4 + n + 2n^2} = \lim_{n->\infty} \frac{1 - \frac{7}{n} + \frac{8}{n^2}}{\frac{4}{n^2} + \frac{1}{n} + 2} = \frac{\lim_{n->\infty}(1 - \frac{7}{n} + \frac{8}{n^2})}{\lim_{n->\infty}(\frac{4}{n^2} + \frac{1}{n} + 2)} = \frac{\lim_{n->\infty} 1 - \lim_{n->\infty} \frac{7}{n} + \lim_{n->\infty} \frac{8}{n^2}}{\lim_{n->\infty} \frac{4}{n^2} + \lim_{n->\infty} \frac{1}{n} + \lim_{n->\infty} 2} = \frac{1 - 0 + 0}{0 + 0 + 2} = \frac{1}{2}$$

(bei Kürzen des Bruchs mit der höchsten Zähler- bzw. Nennerpotenz n^2). Es gilt also hinsichtlich des Grenzwerts: $\lim_{n->\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

2. Lösung: I. Ist eine Folge ein Bruch mit Zähler und Nenner als Summen von Potenzen, so gilt:

$$\lim_{n->\infty} \frac{r \cdot p_1(n) + ...}{s \cdot p_2(n) + ...} = \begin{cases} \pm\infty & p_1(n) > p_2(n) \\ \frac{r}{s} & p_1(n) = p_2(n) \\ 0 & p_1(n) < p_2(n) \end{cases}$$

Die Potenzen $p_1(n)$ und $p_2(n)$ sind dabei von den Typen n^k, $k \in \mathbf{R}$ bzw. q^n, $q>0$, wobei für $q>1$ gilt:

$$\lim_{n->\infty} \frac{n^k}{q^n} = 0,$$

für $q<1$:

$$\lim_{n->\infty} q^n = 0, \quad \lim_{n->\infty} \frac{q^n}{n^k} = 0.$$

II. Für den Zähler $Z(n) = n^2 - 7n + 8$ der Folge a_n ist der Ausdruck n^2 die höchste Potenz, für den

Nenner $N(n) = 4 + n + 2n^2$ der Term $2n^2$ der Ausdruck mit der höchsten Potenz. Beide höchste Potenzen sind gleich, die Koeffizienten vor den Potenzen sind r=1 und s=2, als Grenzwert ergibt sich also die Zahl r/s, mithin gilt: $\lim_{n->\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

www.michael-buhlmann.de / 09.2014 / Aufgabe 48