Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Folgen, Reihen
> Explizite Folge

Aufgabe: Untersuche die Folge:

$$a_n = \frac{2n^2 + 11}{3n^2 + 4}$$

auf Beschränktheit.

1. Lösung: I. Wir definieren: a) Eine Folge $\{a_n\}$ heißt <u>nach unten beschränkt</u>, wenn es eine <u>untere Schranke</u> $S_u \varepsilon \mathbf{R}$ gibt mit:

$$a_n \geq S_u \text{ für alle } n\varepsilon\mathbf{N}.$$

b) Eine Folge $\{a_n\}$ heißt <u>nach oben beschränkt</u>, wenn es eine <u>obere Schranke</u> $S_o \varepsilon \mathbf{R}$ gibt mit:

$$a_n \leq S_o \text{ für alle } n\varepsilon\mathbf{N}.$$

c) Eine Folge $\{a_n\}$ heißt <u>beschränkt</u>, wenn $\{a_n\}$ nach oben und nach unten beschränkt ist, d.h.: es gibt eine untere Schranke $S_u \varepsilon \mathbf{R}$ und eine obere Schranke $S_o \varepsilon \mathbf{R}$ mit:

$$S_u \leq a_n \leq S_o \text{ für alle } n\varepsilon\mathbf{N}.$$

II. Bei den nachfolgenden Beweisen zu den Beschränktheitseigenschaften der Folge sind immer Ungleichungen auf allgemeingültige Aussagen durch Äquivalenzumformungen zurückzuführen.

Wir haben für die Folge $a_n = \frac{2n^2 + 11}{3n^2 + 4}$ mit den Folgengliedern: $a_1 = \frac{13}{7}$, $a_2 = \frac{19}{16}$, $a_3 = \frac{27}{31}$, $a_4 = \frac{43}{52}$, … die nachstehenden Behauptungen und Beweise:

1) <u>Behauptung</u>: a_n hat als eine untere Schranke $S_u = 0$.

<u>Beweis</u>:	$a_n \geq S_u$	(für alle $n\varepsilon\mathbf{N}$)
	$\frac{2n^2 + 11}{3n^2 + 4} \geq 0$	$\mid \cdot(3n^2+4)$ (> 0)
	$2n^2 + 11 \geq 0$	$\mid -11$
	$n^2 \geq -11$	wahre Aussage für alle natürlichen Zahlen

2) <u>Behauptung</u>: a_n hat als eine obere Schranke $S_0 = 2$.

<u>Beweis</u>:	$a_n \leq S_0$	(für alle $n\varepsilon\mathbf{N}$)
	$\frac{2n^2 + 11}{3n^2 + 4} \leq 2$	$\mid \cdot(3n^2+4)$ (> 0)
	$2n^2 + 11 \leq 2(3n^2 + 4)$	
	$2n^2 + 11 \leq 6n^2 + 8$	$\mid -2n^2, -8$
	$3 \leq 4n^2$	wahre Aussage für alle natürlichen Zahlen

3) Aus der Beschränktheit der Folge nach unten und oben folgt die Beschränktheit insgesamt.

2. Lösung: I. Hier gehen wir wie folgt vor: Hat eine Folge einen Grenzwert, so ist sie auch beschränkt. Es ist also im Falle der Konvergenz der Folge der Grenzwert zu ermitteln. Dabei ist wahr: Ist eine Folge ein Bruch mit Zähler und Nenner als Summen von Potenzen, so gilt:

$$\lim_{n->\infty} \frac{r \cdot p_1(n)+...}{s \cdot p_2(n)+...} = \begin{cases} \pm\infty & p_1(n) > p_2(n) \\ \frac{r}{s} & p_1(n) = p_2(n) \\ 0 & p_1(n) < p_2(n) \end{cases}$$

Die Potenzen $p_1(n)$ und $p_2(n)$ sind dabei u.a. vom Typ n^k, $k \in \mathbf{R}$.

II. Für den Zähler $Z(n) = 2n^2 + 11$ der Folge a_n ist der Ausdruck $2n^2$ die höchste Potenz, für den Nenner $N(n) = 3n^2 + 4$ der Term $3n^2$ der Ausdruck mit der höchsten Potenz. Beide höchste Potenzen sind gleich, die Koeffizienten vor den Potenzen sind r=2 und s=3, als Grenzwert ergibt sich also die Zahl r/s, mithin gilt: $\lim_{n->\infty} a_n = \frac{2}{3}$. Damit ist die Folge $a_n = \frac{2n^2+11}{3n^2+4}$ auch beschränkt.

www.michael-buhlmann.de / 09.2014 / Aufgabe 49