Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Folgen, Reihen
> Explizite Folge

Aufgabe: Untersuche die Folge:

$$a_n = \frac{2n^2+11}{3n^2+4}$$

auf Monotonie.

Lösung: I. Wir definieren: a) Eine Folge $\{a_n\}$ heißt monoton fallend, falls:

$a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \varepsilon \mathbf{N}$.

b) Eine Folge $\{a_n\}$ heißt monoton steigend, falls:

$a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \varepsilon \mathbf{N}$.

II. Beim nachfolgenden Beweis zur Monotonie der Folge ist eine Ungleichung auf eine allgemeingültige Aussage durch Äquivalenzumformungen zurückzuführen. Wir haben für die Folge $a_n = \frac{2n^2+11}{3n^2+4}$ mit den Folgengliedern: $a_1 = \frac{13}{7}$, $a_2 = \frac{19}{16}$, $a_3 = \frac{27}{31}$, $a_4 = \frac{43}{52}$, … die nachstehende Behauptung mit Beweis:

Behauptung: a_n ist monoton fallend.

Beweis: $a_n \geq a_{n+1}$ (für alle $n \varepsilon \mathbf{N}$)

$$\frac{2n^2+11}{3n^2+4} \geq \frac{2(n+1)^2+11}{3(n+1)^2+4}$$

$$\frac{2n^2+11}{3n^2+4} \geq \frac{2n^2+4n+13}{3n^2+6n+7} \qquad | \cdot(3n^2+4)\ (>0),\ \cdot(3n^2+6n+7)\ (>0)$$

$$(2n^2+11)(3n^2+6n+7) \geq (2n^2+4n+13)(3n^2+4)$$

$$6n^4+12n^3+14n^2+33n^2+66n+77 \geq 6n^4+8n^2+12n^3+16n+39n^2+52$$

$$6n^4+12n^3+47n^2+66n+77 \geq 6n^4+12n^3+47n^2+16n+52 \qquad | -6n^2, -12n^3, -47n^2$$

$$66n+77 \geq 16n+52 \qquad | -16n, -77$$

$$50n \geq -25 \qquad | :50$$

$$n \geq -\frac{1}{2}$$ wahre Aussage für alle natürlichen Zahlen

www.michael-buhlmann.de / 09.2014 / Aufgabe 50