Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Folgen, Reihen
> Rekursive Folge

Aufgabe: Forme die rekursive Folge:

$$a_n = a_{n-1} + n,\ a_1 = 0$$

in eine Folge a_n in expliziter Darstellung um.

Lösung: I. Allgemein gilt: Rekursive Folgen vom Typ $a_n = a_{n-1} + p(n)$ mit dem Polynom k-ten Grades

$$p(n) = \alpha_k n^k + \alpha_{k-1} n^{k-1} + ... + \alpha_2 n^2 + \alpha_1 n + \alpha_0$$

lassen sich explizit darstellen als ein Polynom (k+1)-ten Grades, als:

$$a_n = a\cdot n^{k+1} + b\cdot n^k + c\cdot n^{k-1} + \ldots + xn^2 + yn + z$$

Die Koeffizienten a, b, c, … bestimmen sich aus den durch die rekursive Folgenvorschrift ermittelten Folgengliedern a_1, a_2, … a_{k+2} und aus dem dazugehörenden linearen Gleichungssystem mit Hilfe des Gauß-Algorithmus.

II. 1) In der Aufgabe liegt eine rekursive Folge vom Typ $a_n = a_{n-1} + p(n)$ vor mit einem Polynom 1. Grades p(n) = n. Die Folge a_n lässt sich somit explizit darstellen als ein Polynom 2. Grades, d.h. durch den *Ansatz*:

$$a_n = an^2 + bn + c \quad (*)$$

mit noch zu bestimmenden Koeffizienten a, b, c.

2) Wir ermitteln die ersten Folgenglieder von a_n durch Einsetzen in die Rekursion: $a_1 = 0$, $a_2 = 0+2 = 2$, $a_3 = 2+3 = 5$, $a_4 = 5+4 =9$, $a_5 = 9+5 = 14$, $a_6 = 14+6 = 20$ usw. Wir setzen n = 1, 2, 4 in die Gleichung (*) ein und erhalten das *lineare Gleichungssystem*:

$a_1 = 0 = a + b + c$
$a_2 = 2 = 4a + 2b + c$
$a_4 = 9 = 16a + 4b +c$

3) Die *Lösung des linearen Gleichungssystems* geschieht mit dem Gaußalgorithmus:

<u>Lineares Gleichungssystem</u>:

$+\ 1a + 1b + 1c = 0$
$+\ 4a + 2b + 1c = 2$
$+\ 16a + 4b + 1c = 9$

<u>Anfangstableau</u>:

1	1	1	|	0
4	2	1	|	2
16	4	1	|	9

<u>1. Schritt</u>: 1*(*2*) - 4*(*1*) / 1*(*3*) - 16*(*1*) /

1	1	1	|	0
0	-2	-3	|	2
0	-12	-15	|	9

<u>2. Schritt</u>: 2*(*1*) + 1*(*2*) / -1*(*3*) + 6*(*2*) /

2	0	-1	|	2
0	-2	-3	|	2
0	0	-3	|	3

<u>3. Schritt</u>: -3*(*1*) + 1*(*3*) / -1*(*2*) + 1*(*3*) /

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

<u>Teilen</u>: (*1*):(-6) / (*2*):2 / (*3*):(-3) /

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

<u>Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems</u>:

$$\begin{array}{lllll} +\ 1a & & & = & 0.5 \\ & +\ 1b & & = & 0.5 \\ & & +\ 1c & = & -1 \end{array}$$

<u>Lösungen des linearen Gleichungssystems</u>:

$a = 0.5$
$b = 0.5$
$c = -1$

4) Mit a=0,5, b=0,5, c=-1, eingesetzt in Ansatz (*), gilt also die *explizite Darstellung der Folge*:

$a_n = 0{,}5\cdot n^2 + 0{,}5\cdot n - 1.$

www.michael-buhlmann.de / 09.2014 / Aufgabe 47