Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Folgen, Reihen
> Fibonacci-Zahlen als rekursive Folge

Aufgabe: Die rekursive <u>Fibonacci-Folge</u> $(F_n)_{n\varepsilon \mathbf{N}}$ genügt dem Bildungsgesetz:

$$F_n = F_{n-2} + F_{n-1},\ F_0 = 0,\ F_1 = 1.$$

a) Zeige: Es ist:

$$\lim_{n->\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \Phi$$

mit $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}6180339887$ als goldener Schnitt.

b) Zeige: Die Fibonacci-Folge lässt sich explizit darstellen als:

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} = \frac{\Phi^n - \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Lösung: a) Wir formen um:

$$F_n = F_{n-2} + F_{n-1} \qquad | :F_{n-1}$$

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}} + 1 \quad (*)$$

und haben unter der Voraussetzung der Konvergenz als (existierende formale) Grenzwerte: $\lim_{n->\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}} = \lim_{n->\infty}\frac{F_{n-1}}{F_{n-2}} = \Phi$ und: $\lim_{n->\infty}\frac{F_{n-2}}{F_{n-1}} = \frac{1}{\Phi}$, so dass sich aus dem Grenzübergang von (*) mit anschließender Berechnung von Φ ergibt:

$$\lim_{n->\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}} = \lim_{n->\infty}\frac{F_{n-2}}{F_{n-1}} + 1$$

$$\Phi = \frac{1}{\Phi} + 1 \qquad | \cdot \Phi$$

$$\Phi^2 = 1 + \Phi \qquad | -\Phi$$

$$\Phi^2 - \Phi = 1 \qquad | -1$$

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0 \qquad \text{(a-b-c-Formel: a = 1, b = -1, c = -1)}$$

$$\Phi_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\Phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \Phi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Da für alle Folgenglieder der Fibonacci-Zahlen $F_n \geq 0$ gilt, ist der Grenzwert der Folge $\left(\frac{F_n}{F_{n-1}}\right)_{n \varepsilon N}$ gleich der positiven Lösung der quadratischen Gleichung, also:

$$\lim_{n->\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Die Konvergenz der Folge $\left(\frac{F_n}{F_{n-1}}\right)_{n \varepsilon N}$ erklärt sich im Übrigen für die Folgenglieder $\frac{F_m}{F_{m-1}}$, $\frac{F_n}{F_{n-1}}$, m<n, aus der Abschätzung:

$$\left|\frac{F_n}{F_{n-1}} - \frac{F_m}{F_{m-1}}\right| < \sum_{i=m}^{n-1}\frac{1}{i^2}$$

auf Grund der Endlichkeit der unendlichen Reihe $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2} = \frac{\pi}{6}$.

b) I. Zentral für die nachfolgenden Berechnungen ist die oben ermittelte quadratische Gleichung:

$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$.

Durch Umstellen erhalten wir:

$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0 \qquad | +1$

$\Phi^2 - \Phi = 1$ (1)

$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0 \qquad | +1$

$\Phi^2 - \Phi = 1 \qquad | +\Phi$

$\Phi^2 = 1 + \Phi \qquad | :\Phi^2$

$1 = \frac{1}{\Phi^2} + \frac{1}{\Phi}$ (2).

Weiter ist:

$$-\frac{1}{\Phi} = -\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = -\frac{2}{1+\sqrt{5}} = -\frac{2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = -\frac{2(1-\sqrt{5})}{1-\sqrt{5}^2} = -\frac{2(1-\sqrt{5})}{1-5} = -\frac{2(1-\sqrt{5})}{-4} = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

womit die Gleichheit

$$\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} = \frac{\Phi^n - \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

sicher gestellt ist.

II. Wir weisen (in einem Beweis mit vollständiger Induktion) zuerst nach, dass die Formel:

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} = \frac{\Phi^n - \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

für n = 0 und n = 1 erfüllt ist. Es folgt:

n = 0: $F_0 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0}{\sqrt{5}} = \frac{\Phi^0 - \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^0}{\sqrt{5}} = \frac{1-1}{\sqrt{5}} = 0$

n = 1: $F_1 = \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} = \dfrac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\frac{2\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$.

Es gelte nun die Richtigkeit der Beziehungen:

$$F_{n-2} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}}{\sqrt{5}} = \frac{\Phi^{n-2} - \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^{n-2}}{\sqrt{5}},\quad F_{n-1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}} = \frac{\Phi^{n-1} - \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}}.$$

Dann ergibt sich:

$$F_{n-2} + F_{n-1} = \frac{\Phi^{n-2} - \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^{n-2}}{\sqrt{5}} + \frac{\Phi^{n-1} - \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^{n-2} - \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^{n-2} + \Phi^{n-1} - \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^{n-1}\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^{n-2} + \Phi^{n-1} - \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^{n-2} - \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^{n-1}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^{n-2} + \Phi^{n-1} - \left(\left(-\frac{1}{\Phi}\right)^{n-2} + \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^{n-1}\right)\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^{n}\left(\Phi^{-2} + \Phi^{-1}\right) - \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^{n}\left(\left(-\frac{1}{\Phi}\right)^{-2} + \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^{-1}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^{n}\left(\frac{1}{\Phi^2} + \frac{1}{\Phi}\right) - \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^{n}\left(\Phi^2 - \Phi\right)\right) \underset{(1),(2)}{=}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^{n} \cdot 1 - \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^{n} \cdot 1\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^{n} - \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^{n}\right) = \frac{\Phi^{n} - \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^{n}}{\sqrt{5}} = F_n$$

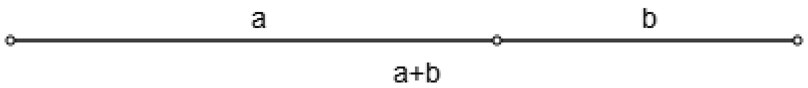
und damit die die Fibonacci-Folge ausmachende Rekursion: $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$. Damit ist die explizite Darstellung der Folge nachgewiesen.

Anhang: Goldener Schnitt

In der Geometrie ist der goldene Schnitt die besondere Teilung einer Gesamtstrecke a+b in Teilstrecken a und b, so dass:

$$\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}$$

erfüllt ist. D.h.: Beim goldenen Schnitt $\Phi = \frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}$ entspricht das Verhältnis der Gesamtstrecke (a+b) zur längeren Teilstrecke (a) dem von längerer (a) zur kürzeren Teilstrecke (b).



Aus den Teilverhältnissen $\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}$ lässt sich mit $\Phi = \frac{a}{b}$ der goldene Schnitt vom Wert her bestimmen. Es gelten die Umformungen:

$$\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}$$

$$1+\frac{b}{a}=\frac{a}{b} \qquad (\Phi = \frac{a}{b})$$

$$1+\frac{1}{\Phi}=\Phi \qquad | \cdot \Phi$$

$$1+\Phi=\Phi^2 \qquad | -\Phi$$

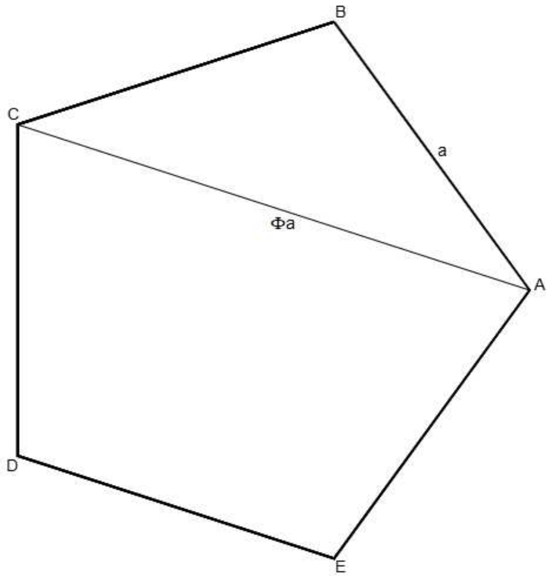
$$1=\Phi^2-\Phi \qquad | -1$$

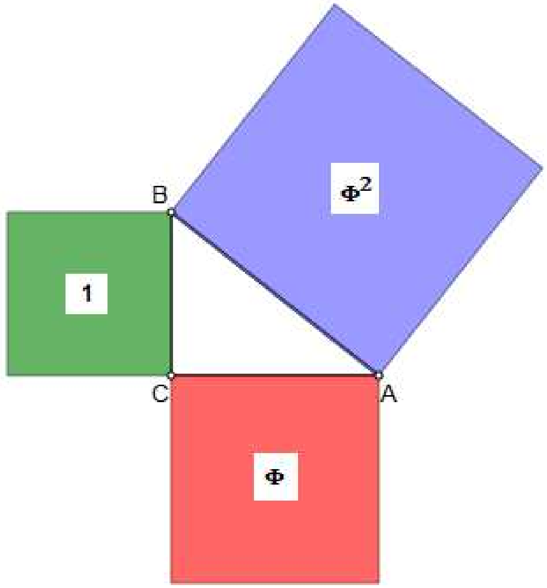
$$0=\Phi^2-\Phi-1 \qquad \text{(a-b-c-Formel: a = 1, b = -1, c = -1)}$$

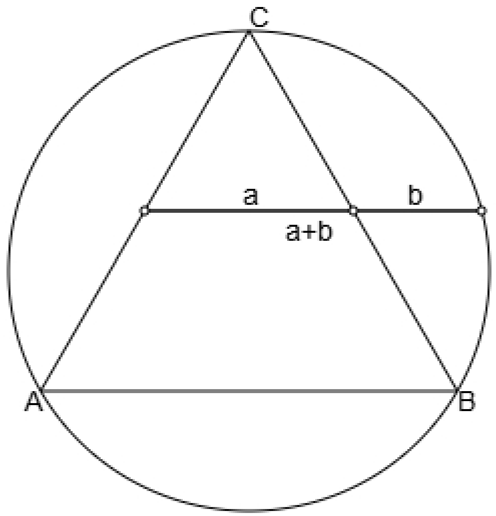
$$\Phi_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$\Phi_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \Phi_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Wegen der Positivität des geometrischen Streckenverhältnisses muss der goldene Schnitt $\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ sein. In der Geometrie tritt der goldene Schnitt vielfach in Erscheinung, z.B. als Verhältnis von Diagonalen- und Seitenlänge in einem regelmäßigen Fünfeck:



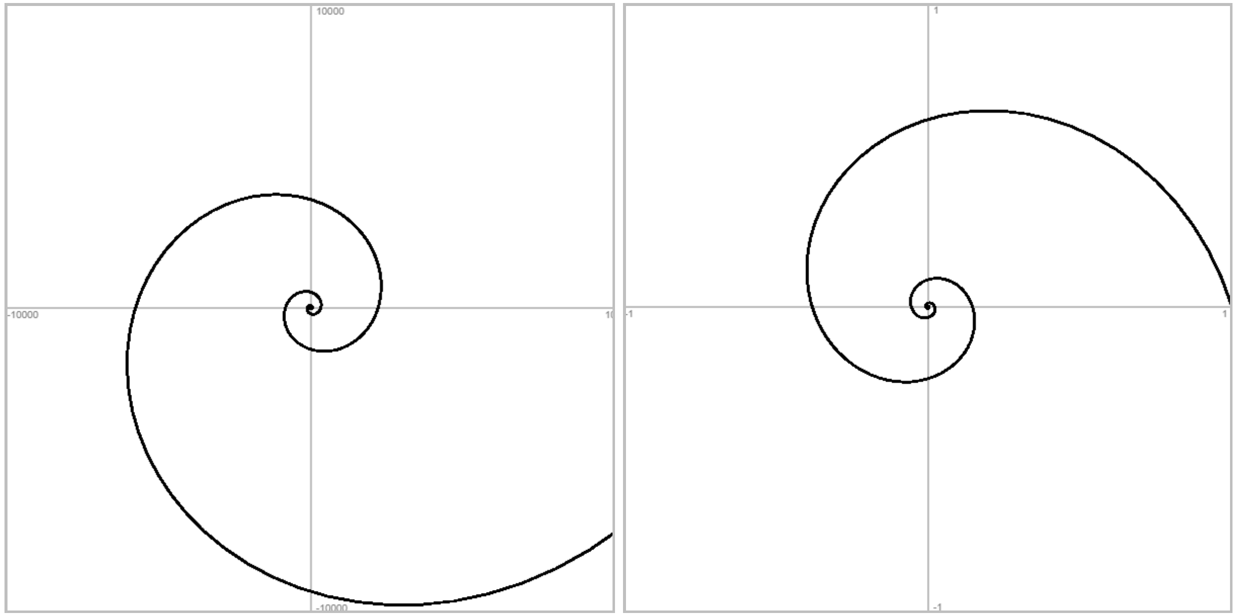




Das Kepler-Dreieck ist ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seitenlängen a = 1, b = $\sqrt{\Phi}$ und c = Φ; es gilt der Satz des Pythagoras: $1+\Phi=\Phi^2$. Bei einem gleichseitigen Odom-Dreieck mit Umkreis wird die zu einer Seite parallele und durch die Mitten der anderen Seiten gehende Strecke zwischen Seitenmitte und Schnittpunkt mit dem Umkreis im Verhältnis des goldenen Schnitts geteilt.

Der goldene Schnitt Φ ist irrational, da $\sqrt{5}$ eine irrationale Zahl ist. In der Folge der Fibonacci-Zahlen $(F_n)_{n\varepsilon\mathbf{N}}$ strebt das Verhältnis von je zwei aufeinanderfolgenden Zahlen F_{n+1}/F_n für wachsendes n gegen Φ. Jede Fibonacci-Zahl lässt sich explizit darstellen als: $F_n=\dfrac{\Phi^n-\left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n}{\sqrt{5}}$. Lukas-Zahlen sind vom Typ: $L_n=\Phi^n+\left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n=\Phi^n+(1-\Phi)^n$, n$\varepsilon$**N**. Die Zahl Φ lässt sich als „irrationalste" aller irrationalen Zahlen als Kettenbruch darstellen: $\Phi=1+\dfrac{1}{\Phi}=1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{\Phi}}=1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\Phi}}}=$ … Ein abbrechender Kettenbruch ist dann das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen: $1+\dfrac{1}{1}=2=\dfrac{F_2}{F_1}$, $1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{1}}=1{,}5=\dfrac{F_3}{F_2}$ usw. Auch gilt wegen $\Phi^2=1+\Phi$, d.h. $\Phi=\sqrt{1+\Phi}$ die Darstellung $\Phi=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}}$ als unendliche Kettenwurzel mit der rekursiven Folge $\Phi_n = \sqrt{1+\Phi_{n-1}}$, $\Phi_0 = 1$ bei $\lim_{n->\infty} \Phi_n = \Phi$.

In der Analysis spielt die goldene Spirale vermöge: r(w) = $\Phi^{\frac{2w}{\pi}}$ mit reellem Parameter w eine gewisse Rolle, auch die *Spira mirabilis* mit r(w) = $\Phi^{-\frac{2w}{\pi}}$ mit Basis $\frac{1}{\Phi}$ in der Potenz:



Analytisch sind auch die Zusammenhänge zwischen der Kreiszahl π und dem goldenen Schnitt Φ. Es gelten die Beziehungen: $\Phi = 2\cos(\frac{\pi}{5})$, $\frac{1}{\Phi} = 2\sin(\frac{\pi}{10})$, $\sqrt{3-\Phi} = 2\sin(\frac{\pi}{5})$, π = $6\arctan(\frac{1}{\Phi}) - 2\arctan(\frac{1}{\Phi^5})$, $\Phi = e^{ar\sinh(\frac{1}{2})}$, $\frac{1}{\Phi} = e^{ar\sinh(-\frac{1}{2})}$ usw. für trigonometrische, Arkus- und Areafunktionen. In Bezug auf die reelle Gammafunktion Γ(x) folgt noch: $\Gamma(\frac{1}{5}) \cdot \Gamma(\frac{4}{5}) = \frac{2}{5}\pi\sqrt{5}\sqrt{2+\Phi}$. Unendliche Reihen zu Φ sind: $\Phi = \frac{\frac{1}{\Phi}}{1-\frac{1}{\Phi}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\Phi^i}$,

$\Phi = 4 - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2^i}}$ (mit den Kehrwerten der Fibonacci-Zahlen F_0, F_1, F_2, F_4, F_8, …).

Literaturhinweise: BEUTELSPACHER, ALBERT, PETRI, BERNHARD, Der Goldene Schnitt, Zürich 1989; https://de.wikipedia.org/wiki/Fibonacci-Folge (Fibonacci-Zahlen); https://de.wikipedia.org/wiki/Goldener_Schnitt (Goldener Schnitt).

Anhang: Folge der Fibonacci-Zahlen mit den expliziten Näherungen

	Rekursiv			*explizit*		
Schritt n =	$\mathbf{F_{n-2}}$ =	$\mathbf{F_{n-1}}$ =	$\mathbf{F_n}$ = $F_{n-2}+F_{n-1}$ =	$\mathbf{F_n}$ = $[((1+\sqrt{5})/2)^n - ((1-\sqrt{5})/2)^n]/\sqrt{5}$	$\mathbf{F_n}$ ≈ $((1+\sqrt{5})/2)^n/\sqrt{5}$	**q** = F_n/F_{n-1}
0			0	0	0.4472135954999579	
1			1	1	0.7236067977499789	
2	0	1	1	1	1.1708203932499368	1
3	1	1	2	2	1.8944271909999157	2
4	1	2	3	3	3.065247584249853	1.5
5	2	3	5	5	4.959674775249769	1.6666666666666667
6	3	5	8	8	8.024922359499623	1.6
7	5	8	13	13	12.984597134749393	1.625
8	8	13	21	21	21.009519494249016	1.6153846153846154
9	13	21	34	34	33.99411662899841	1.619047619047619
10	21	34	55	55	55.00363612324743	1.6176470588235294
11	34	55	89	89	88.99775275224584	1.6181818181818182
12	55	89	144	144	144.0013888754933	1.6179775280898876
13	89	144	233	233	232.9991416277391	1.6180555555555556
14	144	233	377	377	377.0005305032324	1.6180257510729614
15	233	377	610	610	609.9996721309716	1.6180371352785146
16	377	610	987	987	987.0002026342041	1.618032786885246
17	610	987	1597	1597	1596.9998747651757	1.618034447821682
18	987	1597	2584	2584	2584.00007739938	1.6180338134001253
19	1597	2584	4181	4181	4180.999952164556	1.618034055727554
20	2584	4181	6765	6765	6765.000029563936	1.6180339631667064
21	4181	6765	10946	10946	10945.999981728492	1.6180339985218033
22	6765	10946	17711	17711	17711.000011292428	1.618033985017358
23	10946	17711	28657	28657	28656.999993020923	1.6180339901755971
24	17711	28657	46368	46368	46368.000004313355	1.618033988205325
25	28657	46368	75025	75025	75024.99999733428	1.618033988957902

26	46368	75025	121393	121393	121393.00000164764	1.6180339886704431
27	75025	121393	196418	196418	196417.99999898195	1.6180339887802426
28	121393	196418	317811	317811	317811.0000006296	1.618033988738303
29	196418	317811	514229	514229	514228.9999996115	1.6180339887543225
30	317811	514229	832040	832040	832040.0000002412	1.6180339887482036
31	514229	832040	1346269	1346269	1346268.9999998529	1.6180339887505408
32	832040	1346269	2178309	2178309	2178309.000000094	1.6180339887496482
33	1346269	2178309	3524578	3524578	3524577.9999999474	1.618033988749989
34	2178309	3524578	5702887	5702887	5702887.000000042	1.618033988749859
35	3524578	5702887	9227465	9227465	9227464.999999989	1.6180339887499087
36	5702887	9227465	14930352	14930352	14930352.000000032	1.6180339887498896
37	9227465	14930352	24157817	24157817	24157817.000000022	1.618033988749897
38	14930352	24157817	39088169	39088169	39088169.000000045	1.618033988749894
39	24157817	39088169	63245986	63245986	63245986.00000007	1.6180339887498951
40	39088169	63245986	102334155	102334155	102334155.00000013	1.6180339887498947
41	63245986	102334155	165580141	165580141	165580141.0000002	1.618033988749895
42	102334155	165580141	267914296	267914296	267914296.00000036	1.618033988749895
43	165580141	267914296	433494437	433494437	433494437.0000006	1.618033988749895
44	267914296	433494437	701408733	701408733	701408733.0000011	1.618033988749895
45	433494437	701408733	1134903170	1134903170	1134903170.0000017	1.618033988749895
46	701408733	1134903170	1836311903	1836311903	1836311903.0000026	1.618033988749895
47	1134903170	1836311903	2971215073	2971215073	2971215073.000005	1.618033988749895
48	1836311903	2971215073	4807526976	4807526976	4807526976.000008	1.618033988749895
49	2971215073	4807526976	7778742049	7778742049	7778742049.000013	1.618033988749895
50	4807526976	7778742049	12586269025	12586269025	12586269025.00002	1.618033988749895
51	7778742049	12586269025	20365011074	20365011074	20365011074.000034	1.618033988749895
52	12586269025	20365011074	32951280099	32951280099	32951280099.000053	1.618033988749895
53	20365011074	32951280099	53316291173	53316291173	53316291173.00009	1.618033988749895
54	32951280099	53316291173	86267571272	86267571272	86267571272.00015	1.618033988749895
55	53316291173	86267571272	139583862445	139583862445	139583862445.00027	1.618033988749895

56	86267571272	139583862445	225851433717	225851433717	225851433717.00043	1.618033988749895
57	139583862445	225851433717	365435296162	365435296162	365435296162.0007	1.618033988749895
58	225851433717	365435296162	591286729879	591286729879	591286729879.0011	1.618033988749895
59	365435296162	591286729879	956722026041	956722026041	956722026041.0018	1.618033988749895
60	591286729879	956722026041	1548008755920	1548008755920	1548008755920.003	1.618033988749895
61	956722026041	1548008755920	2504730781961	2504730781961	2504730781961.005	1.618033988749895
62	1548008755920	2504730781961	4052739537881	4052739537881	4052739537881.0083	1.618033988749895
63	2504730781961	4052739537881	6557470319842	6557470319842	6557470319842.014	1.618033988749895
64	4052739537881	6557470319842	10610209857723	10610209857723	10610209857723.021	1.618033988749895
65	6557470319842	10610209857723	17167680177565	17167680177565	17167680177565.037	1.618033988749895
66	10610209857723	17167680177565	27777890035288	27777890035288	27777890035288.062	1.618033988749895
67	17167680177565	27777890035288	44945570212853	44945570212853	44945570212853.09	1.618033988749895
68	27777890035288	44945570212853	72723460248141	72723460248141	72723460248141.17	1.618033988749895
69	44945570212853	72723460248141	117669030460994	117669030460994	117669030460994.28	1.618033988749895
70	72723460248141	117669030460994	190392490709135	190392490709135	190392490709135.44	1.618033988749895
71	117669030460994	190392490709135	308061521170129	308061521170129	308061521170129.7	1.618033988749895
72	190392490709135	308061521170129	498454011879264	498454011879264	498454011879265.2	1.618033988749895
73	308061521170129	498454011879264	806515533049393	806515533049393	806515533049395	1.618033988749895
74	498454011879264	806515533049393	1304969544928657	1304969544928657	1304969544928660	1.618033988749895
75	806515533049393	1304969544928657	2111485077978050	2111485077978050	2111485077978055.2	1.618033988749895
76	1304969544928657	2111485077978050	3416454622906707	3416454622906707	3416454622906715.5	1.618033988749895
77	2111485077978050	3416454622906707	5527939700884757	5527939700884757	5527939700884771	1.618033988749895
78	3416454622906707	5527939700884757	8944394323791464	8944394323791464	8944394323791488	1.618033988749895
…						Φ

(Abkürzung: **N** = {0; 1; 2; …} als Menge der natürlichen Zahlen)

www.michael-buhlmann.de / 10.2024 / Aufgabe 2241