Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Fourierreihen
> Lineare Funktion

Aufgabe: Bestimme die Fourierreihe zur linearen punktsymmetrischen Funktion f(x) = x auf dem Intervall [0; 2π].

Lösung: I. Allgemein gilt: Eine 2π-periodische, auf dem Intervall [0, 2π] stückweise definierte, stetige und monotone Funktion f(x) mit endlich vielen Sprungstellen soll in eine Fourierreihe, also in eine unendliche trigonometrische Reihe der Form:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$$

entwickelt werden. Die Fourier-Koeffizienten der Reihe berechnen sich dann als:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx \,,\; a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot\cos(kx)dx \,,\; b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot\sin(kx)dx$$

Dabei gilt für eine gerade Funktion f(x) (also mit f(-x) = f(x)) die Darstellung:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) \,,\; b_k = 0 \,,$$

für eine ungerade Funktion f(x) (also mit f(-x) = -f(x)):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) \,,\; a_k = 0 \,.$$

Die Partialsumme

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$$

heißt trigonometrische Summe (trigonometrisches Polynom, Fouriersumme).

II. Wir berechnen auch mit Hilfe der Produktintegration (partielle Integration) die unbestimmten

Integrale:

$$\int f(x)dx = \int x dx = \frac{1}{2}x^2$$

$$\int f(x)\cos(kx)dx = \int x\cdot\cos(kx)dx = x\cdot\frac{1}{k}\sin(kx) - \int 1\cdot\frac{1}{k}\sin(kx)dx = \frac{x}{k}\sin(kx) - \frac{1}{k}\int\sin(kx)dx =$$

$$\frac{x}{k}\sin(kx) - \frac{1}{k}\cdot\left(-\frac{1}{k}\cos(kx)\right) = \frac{x}{k}\sin(kx) + \frac{1}{k^2}\cos(kx)$$

$$\int f(x)\sin(kx)dx = \int x\cdot\sin(kx)dx = x\cdot\left(-\frac{1}{k}\cos(kx)\right) - \int 1\cdot\left(-\frac{1}{k}\cos(kx)\right)dx =$$

$$-\frac{x}{k}\cos(kx) + \frac{1}{k}\int\cos(kx)dx = -\frac{x}{k}\cos(kx) + \frac{1}{k}\cdot\frac{1}{k}\sin(kx) = -\frac{x}{k}\cos(kx) + \frac{1}{k^2}\sin(kx)$$

III. Auf Basis der eben berechneten unbestimmten Integrale lassen sich als Koeffizienten der Fourierreihe bestimmen:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}(2\pi)^2 - \frac{1}{2}\cdot 0^2\right) = \frac{1}{\pi}\cdot 2\pi^2 = 2\pi$$

$a_k = 0$, k = 1, 2, … (punktsymmetrische Funktion f(x) = x)

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot\sin(kx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cdot\sin(kx)dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{k}\cos(kx) + \frac{1}{k^2}\sin(kx)\right]_0^{2\pi} =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\left(-\frac{2\pi}{k}\cos(2k\pi) + \frac{1}{k^2}\sin(2k\pi)\right) - \left(-0\cdot\cos(0) + \frac{1}{k^2}\sin(0)\right)\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2\pi}{k} - 0\right) = -\frac{2}{k}$$

IV. Für die Fourierreihe folgt:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) = \frac{2\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{k}\right)\sin(kx) = \pi - 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(kx)}{k}$$

mit:

```
f(x) =
π +
(-2)*sin(x) +
(-1)*sin(2x) +
(-2/3)*sin(3x) +
(-0.5)*sin(4x) +
(-0.4)*sin(5x) +
(-1/3)*sin(6x) +
(-2/7)*sin(7x) +
(-0.25)*sin(8x) +
(-2/9)*sin(9x) +
(-0.2)*sin(10x) +
(-2/11)*sin(11x) +
(-1/6)*sin(12x) +
(-2/13)*sin(13x) +
(-1/7)*sin(14x) +
(-2/15)*sin(15x) +
(-0.125)*sin(16x) +
(-2/17)*sin(17x) +
(-1/9)*sin(18x) +
(-2/19)*sin(19x) +
(-0.1)*sin(20x) + …
```

V. Übersicht (Sägezahnfunktion):

Funktion f(x) = x auf [0; 2π]; Fouriersumme: n = 10, 100, 1000, 10000 Summanden; Fourierreihe.