Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Fourierreihen
> Kosinusfunktion

Aufgabe: Bestimme die Fourierreihe zur achsensymmetrischen Funktion f(x) = $\cos^2(x)$ auf dem Intervall [0; π].

Lösung: I. Allgemein gilt: Eine T-periodische, auf dem Intervall [0, T] stückweise definierte, stetige und monotone Funktion f(x) mit endlich vielen Sprungstellen soll in eine Fourierreihe, also in eine unendliche trigonometrische Reihe der Form:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)],\ \omega = \frac{2\pi}{T}$$

entwickelt werden. Die Fourier-Koeffizienten der Reihe berechnen sich dann als:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)dx,\ a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cdot\cos(k\omega x)dx,\ b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cdot\sin(k\omega x)dx.$$

Dabei gilt für eine gerade Funktion f(x) (also mit f(-x) = f(x)) die Darstellung:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega x),\ b_k = 0,$$

für eine ungerade Funktion f(x) (also mit f(-x) = -f(x)):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega x),\ a_k = 0.$$

Die Partialsumme

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)]$$

heißt trigonometrische Summe (trigonometrisches Polynom, Fouriersumme).

II. Wir formen die Funktion f(x) = $\cos^2(x)$ vermöge der trigonometrischen Formel des doppelten Winkels um zu:

cos(2x) = 2·$\cos^2(x)$ – 1 = 2·f(x) – 1 ⇔ f(x) = $\cos^2(x)$ = 0,5 + 0,5·cos(2x).

III. Dies ist aber schon die Fourierreihe der Funktion:

f(x) = $\cos^2(x)$ = 0,5 + 0,5·cos(2x)

mit: $a_0/2 = 0{,}5$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0{,}5$, $a_3 = a_4 = \ldots = 0$, $b_1 = b_2 = \ldots = 0$.

IV. Wir analysieren dieses Ergebnis, indem im Folgenden auf herkömmliche Weise die Koeffizienten der Fourierreihe zu f(x) = $\cos^2(x)$ ermittelt werden. Wir berechnen dazu – auch mit Hilfe der Produktintegration (partielle Integration) – die unbestimmten Integrale:

$$\int f(x)dx = \int (0{,}5 + 0{,}5\cos(2x))dx = 0{,}5x + 0{,}5\cdot\frac{1}{2}\sin(2x) = 0{,}5x + 0{,}25\sin(2x)$$

$$\int \cos(2x)\cdot\cos(k\omega x)dx = \cos(2x)\cdot\frac{1}{k\omega}\sin(k\omega x) - \int(-2\sin(2x))\cdot\frac{1}{k\omega}\sin(k\omega x)dx =$$

$$\frac{\cos(2x)}{k\omega}\sin(k\omega x) + \frac{2}{k\omega}\int \sin(2x)\cdot\sin(k\omega x)dx =$$

$$\frac{\cos(2x)}{k\omega}\sin(k\omega x) + \frac{2}{k\omega}\left(\sin(2x)\cdot\left(-\frac{1}{k\omega}\right)\cos(k\omega x) - \int(2\cos(2x))\cdot\left(-\frac{1}{k\omega}\cos(k\omega x)\right)dx\right) =$$

$$\frac{\cos(2x)}{k\omega}\sin(k\omega x) - \frac{2}{k^2\omega^2}\sin(2x)\cdot\cos(k\omega x) + \frac{4}{k^2\omega^2}\int\cos(2x)\cdot\cos(k\omega x)dx \Leftrightarrow$$

$$\int \cos(2x)\cdot\cos(k\omega x)dx - \frac{4}{k^2\omega^2}\int\cos(2x)\cdot\cos(k\omega x)dx = \frac{\cos(2x)}{k\omega}\sin(kx) - \frac{2}{k^2\omega^2}\sin(2x)\cdot\cos(k\omega x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{k^2\omega^2-4}{k^2\omega^2}\int\cos(2x)\cdot\cos(k\omega x)dx = \frac{\cos(2x)}{k\omega}\sin(k\omega x) - \frac{2}{k^2\omega^2}\sin(2x)\cdot\cos(k\omega x) \Leftrightarrow$$

$$\int\cos(2x)\cdot\cos(k\omega x)dx = \frac{k\omega\cos(2x)}{k^2\omega^2-4}\sin(k\omega x) - \frac{2}{k^2\omega^2-4}\sin(2x)\cdot\cos(k\omega x) =$$

$$\frac{k\omega\cos(2x)\cdot\sin(k\omega x) - 2\sin(2x)\cdot\cos(k\omega x)}{k^2\omega^2-4},$$

woraus für $k\omega \neq 2$ folgt:

$$\int f(x)\cdot\cos(k\omega x)dx = \int(0{,}5+0{,}5\cos(2x))\cdot\cos(k\omega x)dx =$$

$$0{,}5\int\cos(k\omega x)dx + 0{,}5\int\cos(2x)\cdot\cos(k\omega x)dx =$$

$$\frac{1}{2k\omega}\sin(k\omega x) + \frac{k\omega\cos(2x)\cdot\sin(k\omega x) - 2\sin(2x)\cdot\cos(k\omega x)}{k^2\omega^2-4} =$$

$$0{,}5\int\cos(k\omega x)dx + 0{,}5\int\cos(2x)\cdot\cos(k\omega x)dx =$$

$$\frac{\sin(k\omega x)}{2k\omega} + \frac{k\omega\cos(2x)\cdot\sin(k\omega x) - 2\sin(2x)\cdot\cos(k\omega x)}{k^2\omega^2-4}.$$

Für $k\omega = 2$ haben wir:

$$\int\cos^2(2x)dx = \int\cos(2x)\cdot\cos(2x)dx = \cos(2x)\cdot\frac{1}{2}\sin(2x) - \int(-2\sin(2x))\cdot\frac{1}{2}\sin(2x)dx =$$

$$\frac{1}{2}\cos(2x)\cdot\sin(2x) + \int\sin(2x)\sin(2x)dx = \frac{1}{2}\cos(2x)\cdot\sin(2x) + \int\sin^2(2x)dx =$$

$$\frac{1}{2}\cos(2x)\cdot\sin(2x) + \int(1-\cos^2(2x))dx = \frac{1}{2}\cos(2x)\cdot\sin(2x) + \int 1dx - \int\cos^2(2x)dx =$$

$$\frac{1}{2}\cos(2x)\cdot\sin(2x) + x - \int\cos^2(2x)dx \Leftrightarrow 2\int\cos^2(2x)dx = \frac{1}{2}\cos(2x)\cdot\sin(2x) + x \Leftrightarrow$$

$$\int\cos^2(2x)dx = \frac{1}{4}\cos(2x)\cdot\sin(2x) + \frac{1}{2}x$$

und weiter:

$$\int f(x)\cdot\cos(2x)dx = \int(0{,}5+0{,}5\cos(2x))\cdot\cos(2x)dx =$$

$$0{,}5\int\cos(2x)dx + 0{,}5\int\cos(2x)\cdot\cos(2x)dx = 0{,}25\sin(2x) + 0{,}5\left(\frac{1}{4}\cos(2x)\cdot\sin(2x) + \frac{1}{2}x\right) =$$

$$0{,}25\sin(2x) + 0{,}125\cos(2x) + 0{,}25x.$$

V. Auf Basis der eben berechneten unbestimmten Integrale lassen sich als Koeffizienten der Fourierreihe bestimmen (T = π, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$):

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (0,5+0,5\cos(2x))dx = \frac{2}{\pi}\left[0,5x+0,25\sin(2x)\right]_0^\pi =$$

$$\frac{2}{\pi}\left((0,5\pi+0,25\sin(2\pi))-(0-0,25\sin(0))\right) = \frac{2}{\pi}\cdot 0,5\pi = 1$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cdot\cos(2x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (0,5+0,5\cos(2x))\cdot\cos(2x)dx =$$

$$\frac{2}{\pi}\left[0,25\sin(2x)+0,125\cos(2x)+0,25x\right]_0^\pi =$$

$$\frac{2}{\pi}\left((0,25\sin(2\pi)+0,125\cos(2\pi)+0,25\pi)-(0,25\sin(0)+0,125\cos(0)+0)\right) =$$

$$\frac{2}{\pi}\cdot(0,125+0,25\pi-0,125) = \frac{2}{\pi}\cdot 0,25\pi = 0,5$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cdot\cos(2kx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (0,5+0,5\sin(2x))\cdot\cos(2kx)dx =$$

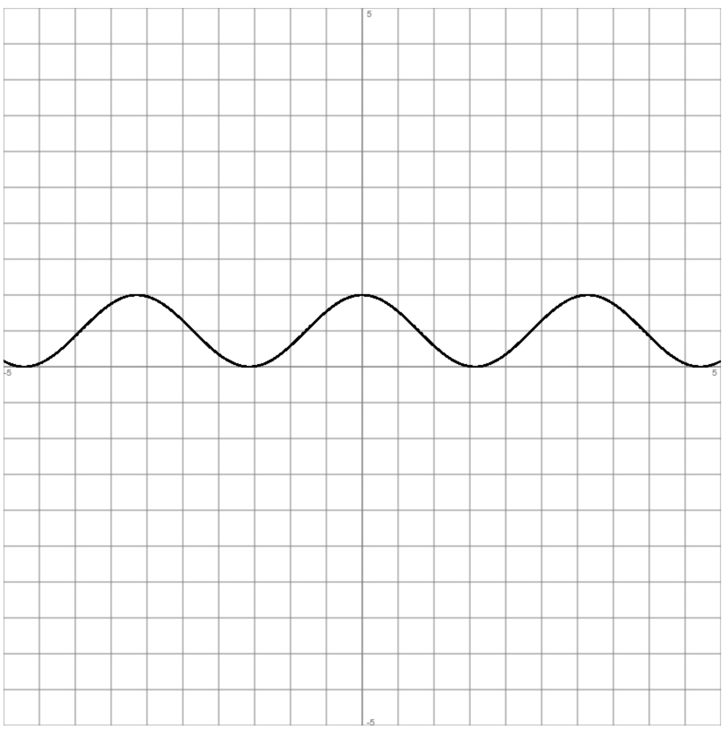
$$\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(2kx)}{4k}+\frac{2k\cos(2x)\cdot\sin(2kx)-2\sin(2x)\cdot\cos(2kx)}{4k^2-4}\right]_0^\pi =$$

$$\frac{2}{\pi}\left(\left(\frac{\sin(2k\pi)}{4k}+\frac{2k\cos(2\pi)\cdot\sin(2k\pi)-2\sin(2\pi)\cdot\cos(2k\pi)}{4k^2-4}\right)-\left(\frac{\sin(0)}{4k}+\frac{2k\cos(0)\cdot\sin(0)-2\sin(0)\cdot\cos(0)}{4k^2-4}\right)\right) =$$

$\frac{1}{\pi}(0-0) = 0$ für k = 2, 3, 4, …

$b_k = 0$, k = 1, 2, … (achsensymmetrische Funktion f(x) = $\cos^2(x)$)

Dies sind mit $a_0/2 = 0,5$, $a_2 = 0,5$ aber genau die Koeffizienten der schon unter III. ermittelten Fourierreihe. Der Graph von Funktion und Fourierreihe f(x) = $\cos^2(x) = 0,5 + 0,5\cdot\cos(2x)$ ist:



VI. Allgemein lassen sich dann noch – über die partielle Integration oder über die Additionstheoreme für den Sinus und den Kosinus – noch folgende Aussagen (Orthogonalitätsrelationen) herleiten:

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx) \cdot \cos(nx) dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \pi & (m = n \neq 0) \\ 2\pi & (m = n = 0) \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx) \cdot \sin(nx) dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \pi & (m = n \neq 0) \\ 0 & (m = n = 0) \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx) \cdot \sin(nx) dx = 0$$

für natürliche Zahlen m, n. Auch daraus erklärt sich, dass fast alle Koeffizienten der Fourierreihe zu $f(x) = \cos^2(x)$ verschwinden.

www.michael-buhlmann.de / 11.2024 / Aufgabe 2264