Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Fourierreihen
> Lineare Funktion

Aufgabe: Gegeben ist die lineare punktsymmetrische Funktion f(x) = x auf dem Intervall [-π; π].

a) Bestimme zur Funktion die entsprechende Fourierreihe.

b) Zeige, dass die (alternierende) Leibnizreihe

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+-... = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i+1}}{2i-1}$$

konvergent ist mit dem Reihenwert $\frac{\pi}{4}$.

Lösung: a) I. Allgemein gilt: Eine 2π-periodische, auf dem Intervall [0, 2π] stückweise definierte, stetige und monotone Funktion f(x) mit endlich vielen Sprungstellen soll in eine Fourierreihe, also in eine unendliche trigonometrische Reihe der Form:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$$

entwickelt werden. Die Fourier-Koeffizienten der Reihe berechnen sich dann als:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx\,,\ a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos(kx)dx\,,\ b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin(kx)dx$$

Dabei gilt für eine gerade Funktion f(x) (also mit f(-x) = f(x)) die Darstellung:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx)\,,\ b_k = 0\,,$$

für eine ungerade Funktion f(x) (also mit f(-x) = -f(x)):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)\,,\ a_k = 0\,.$$

Die Partialsumme

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}[a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$$

heißt trigonometrische Summe (trigonometrisches Polynom, Fouriersumme).

II. Wir berechnen auch mit Hilfe der Produktintegration (partielle Integration) die unbestimmten Integrale:

$$\int f(x)dx = \int xdx = \frac{1}{2}x^2$$

$$\int f(x)\cos(kx)dx = \int x\cdot\cos(kx)dx = x\cdot\frac{1}{k}\sin(kx) - \int 1\cdot\frac{1}{k}\sin(kx)dx = \frac{x}{k}\sin(kx) - \frac{1}{k}\int\sin(kx)dx =$$

$$\frac{x}{k}\sin(kx) - \frac{1}{k}\cdot\left(-\frac{1}{k}\cos(kx)\right) = \frac{x}{k}\sin(kx) + \frac{1}{k^2}\cos(kx)$$

$$\int f(x)\sin(kx)dx = \int x\cdot\sin(kx)dx = x\cdot\left(-\frac{1}{k}\cos(kx)\right) - \int 1\cdot\left(-\frac{1}{k}\cos(kx)\right)dx =$$

$$-\frac{x}{k}\cos(kx) + \frac{1}{k}\int\cos(kx)dx = -\frac{x}{k}\cos(kx) + \frac{1}{k}\cdot\frac{1}{k}\sin(kx) = -\frac{x}{k}\cos(kx) + \frac{1}{k^2}\sin(kx)$$

III. Auf Basis der eben berechneten unbestimmten Integrale lassen sich als Koeffizienten der Fourierreihe bestimmen:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xdx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}\pi^2 - \frac{1}{2}\cdot(-\pi)^2\right) = \frac{1}{\pi}\cdot 0 = 0$$

$a_k = 0$, k = 1, 2, … (punktsymmetrische Funktion f(x) = x)

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin(kx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cdot\sin(kx)dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{k}\cos(kx) + \frac{1}{k^2}\sin(kx)\right]_{-\pi}^{\pi} =$$

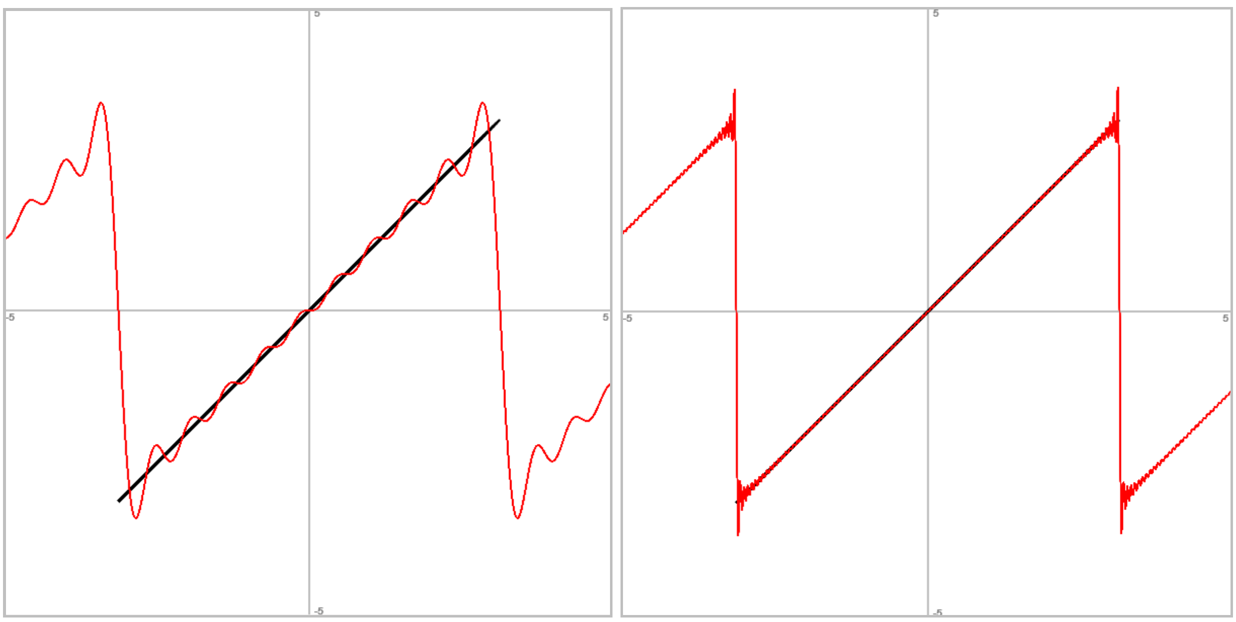
$$\frac{1}{\pi}\left(\left(-\frac{\pi}{k}\cos(k\pi) + \frac{1}{k^2}\sin(k\pi)\right) - \left(-\frac{-\pi}{k}\cdot\cos(-k\pi) + \frac{1}{k^2}\sin(-k\pi)\right)\right) =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{k}\cos(k\pi) - \frac{\pi}{k}\cdot\cos(-k\pi)\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{k}\cos(k\pi) - \frac{\pi}{k}\cdot\cos(k\pi)\right) =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(-\frac{2\pi}{k}\cos(k\pi)\right) = -\frac{2}{k}\cos(k\pi) = -\frac{2}{k}\cdot(-1)^k = \frac{2}{k}\cdot(-1)^{k+1}$$

IV. Für die Fourierreihe folgt:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin(kx) = 0 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k}\cdot(-1)^{k+1}\sin(kx) = 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\cdot\frac{\sin(kx)}{k}$$



Funktion f(x) und Fouriersummen (n = 10, 100)

b) I. (Unendliche) Reihen mit einer Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ lassen sich aus der Folge der Partialsummen $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ bilden beim Übergang n -> ∞ als: $\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i\right\}_{n\in N}$ bzw. $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ gerade im Fall der Konvergenz, d.h. der Reihe als reeller Zahl. Die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ ist damit der (existierende) Grenzwert einer Folge von Partialsummen. Der „Wert" s_n -> s der unendlichen Reihe kann dabei unbestimmt, +∞ oder -∞ sein, es kann sich aber auch eine reelle Zahl s ergeben. Im ersten Fall spricht von der Divergenz, im zweiten von der Konvergenz der unendlichen Reihe.

Eine alternierende Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} a_i$ ist genau dann konvergent, wenn die $\{a_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ mit $a_i \geq 0$ eine Nullfolge bilden, d.h.: $\lim_{i->\infty} a_i = 0$ (Leibnizkriterium für Reihenkonvergenz).

II. Wir wenden das Leibnizkriterium für Reihen an und haben für die alternierende Reihe der Nullfolge von ungeradzahligen Kehrbrüchen

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+-\ldots=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i+1}}{2i-1}$$

in der Tat die Konvergenz der Reihe.

III. Laut Aufgabe a) und deren Lösung gilt die Identität von Funktion f(x) = x und Fourierreihe:

$$f(x) = x = 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\cdot\frac{\sin(kx)}{k}.$$

Einsetzen von x = $\frac{\pi}{2}$ führt auf:

$$f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} = 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\cdot\frac{\sin(k\cdot\frac{\pi}{2})}{k} \underset{k=2i-1}{=} 2\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{2i-1+1}\cdot\frac{\sin((2i-1)\cdot\frac{\pi}{2})}{2i-1} =$$

$$2\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{2i}\cdot\frac{\sin((2i-1)\cdot\frac{\pi}{2})}{2i-1} = 2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sin((2i-1)\cdot\frac{\pi}{2})}{2i-1} = 2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i+1}}{2i-1}$$

auf Grundlage der Transformation k = 2i-1 wegen sin(k$\frac{\pi}{2}$) = 0 für alle geraden natürlichen Zahlen k und sin(k$\frac{\pi}{2}$) = ±1 für alle ungeraden natürlichen Zahlen k, wobei sin(k$\frac{\pi}{2}$) = 1 für k = 1, 5, 9, …, sin(k$\frac{\pi}{2}$) = -1 für k = 3, 7, 11, … Nun ist:

$$\frac{\pi}{2} = 2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i+1}}{2i-1} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i+1}}{2i-1},$$

womit der Reihenwert

$$\frac{\pi}{4} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+-\ldots$$

bestimmt ist.

www.michael-buhlmann.de / 11.2024 / Aufgabe 2265