Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Fourierreihen
> Stückweise konstante Funktion

Aufgabe: Bestimme die reelle und die komplexe Form der Fourierreihe zu der Funktion

$$f(x) = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \le x < 2 \\ 0 & 2 \le x < 4 \end{Bmatrix}$$

auf dem Intervall [0; 4].

Lösung: I. Allgemein gilt: Eine T-periodische, auf dem Intervall [0, T] stückweise definierte, stetige und monotone Funktion f(x) mit endlich vielen Sprungstellen soll in eine reelle Fourierreihe, also in eine unendliche trigonometrische Reihe der Form:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)],\ \omega = \frac{2\pi}{T}$$

entwickelt werden. Die Fourier-Koeffizienten der Reihe berechnen sich dann als:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)dx,\ a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cdot\cos(k\omega x)dx,\ b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cdot\sin(k\omega x)dx.$$

Dabei gilt für eine gerade Funktion f(x) (also mit f(-x) = f(x)) die Darstellung:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega x),\ b_k = 0,$$

für eine ungerade Funktion f(x) (also mit f(-x) = -f(x)):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega x),\ a_k = 0.$$

Die Partialsumme

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)]$$

heißt trigonometrische Summe (trigonometrisches Polynom, Fouriersumme).

II. Die Periode ist: T = 4 => $\omega = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Die Integrale für die Fourierkoeffizienten a_0, a_k, b_k errechnen sich als:

$$a_0 = \frac{2}{4}\int_0^4 f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 1dx + \frac{1}{2}\int_2^4 0dx = \frac{1}{2}\int_0^2 1dx = \frac{1}{2}[x]_0^2 = \frac{1}{2}(2-0) = 1$$

$$a_k = \frac{2}{4}\int_0^4 f(x)\cdot\cos(\frac{k\pi}{2}x)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 1\cdot\cos(\frac{k\pi}{2}x)dx + \frac{1}{2}\int_2^4 0\cdot\cos(\frac{k\pi}{2}x)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \cos(\frac{k\pi}{2}x)dx =$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\frac{k\pi}{2}}\sin(\frac{k\pi}{2}x)\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{k\pi}\sin(\frac{k\pi}{2}x)\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{k\pi}\sin(\frac{k\pi}{2}\cdot 2) - \frac{2}{k\pi}\sin(\frac{k\pi}{2}\cdot 0)\right) =$$

$$\frac{1}{2}(\sin(k\pi) - \sin(0)) = \frac{1}{2}(0-0) = 0$$

$$b_k = \frac{2}{4}\int_0^4 f(x)\cdot\sin(\frac{k\pi}{2}x)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 1\cdot\sin(\frac{k\pi}{2}x)dx + \frac{1}{2}\int_2^4 0\cdot\sin(\frac{k\pi}{2}x)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \sin(\frac{k\pi}{2}x)dx =$$

$$\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{\frac{k\pi}{2}}\cos(\frac{k\pi}{2}x)\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left[-\frac{2}{k\pi}\cos(\frac{k\pi}{2}x)\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{k\pi}\cos(\frac{k\pi}{2}\cdot 2) + \frac{2}{k\pi}\cos(\frac{k\pi}{2}\cdot 0)\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{k\pi}\cos(k\pi) + \frac{2}{k\pi}\cos(0)\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{k\pi}(-1)^k + \frac{2}{k\pi}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{k\pi}(1-(-1)^k) = \frac{1-(-1)^k}{k\pi}$$

Alle Koeffizienten a_k, k = 1, 2, … verschwinden also, ebenso die Koeffizienten b_k mit geradem k = 2, 4, …

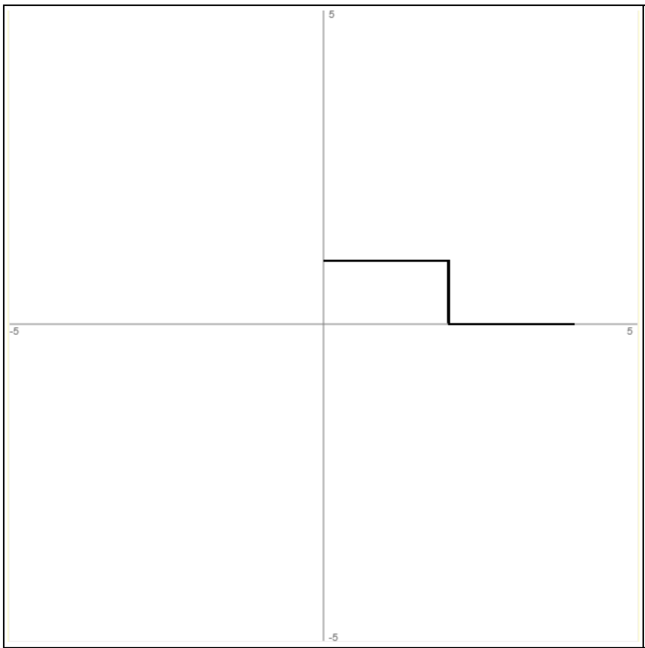
III. Die reelle Form der Fourierreihe bestimmt sich damit als:

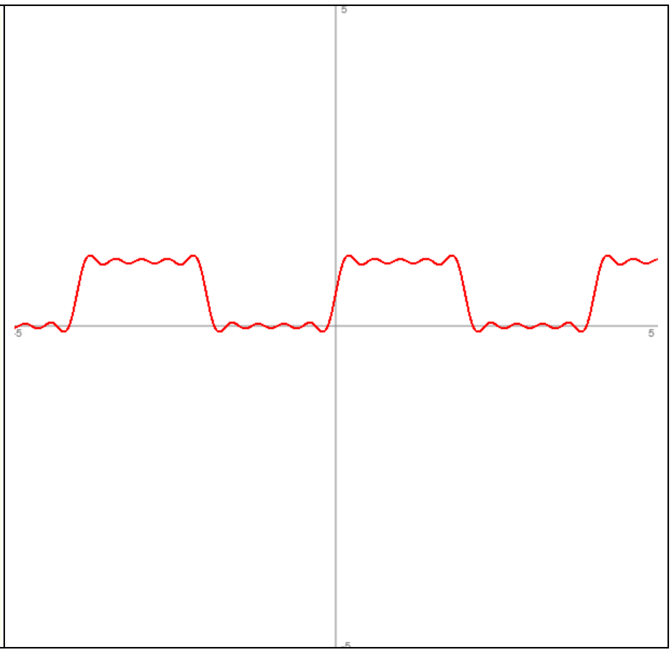
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{k\pi}\sin(\frac{k\pi}{2}x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{k}\sin(\frac{k\pi}{2}x) =$$

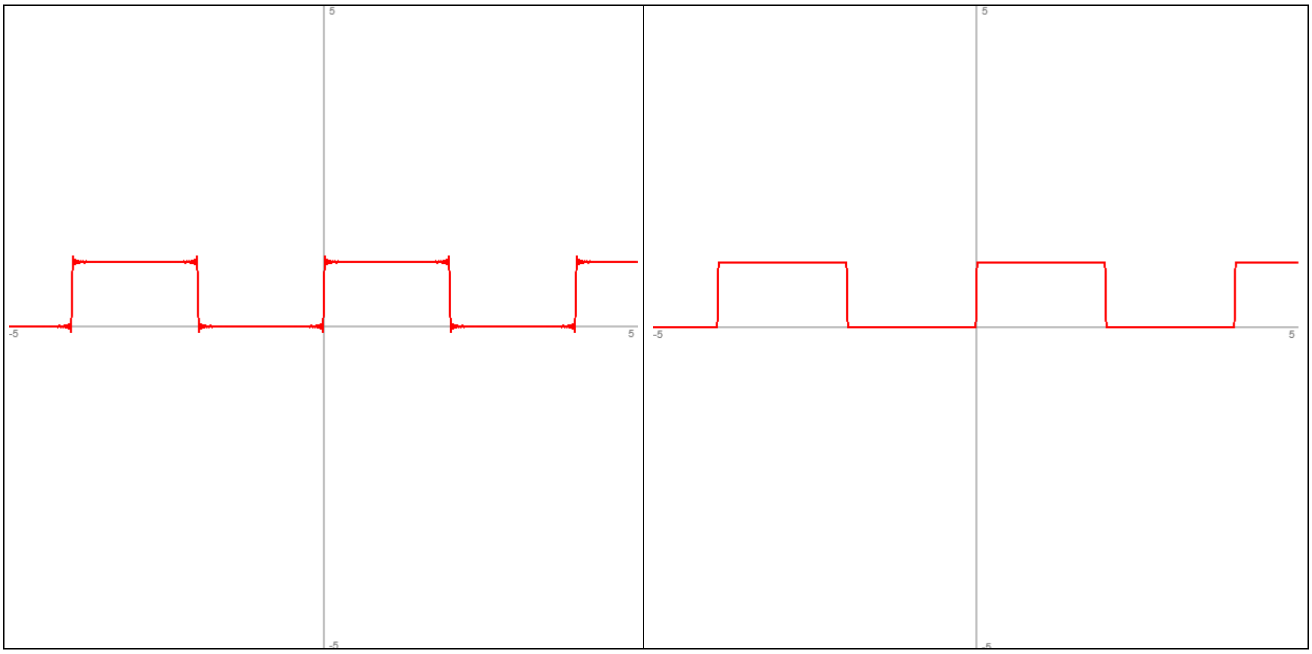
$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2}x) + \frac{2}{3\pi}\sin(\frac{3\pi}{2}x) + \frac{2}{5\pi}\sin(\frac{5\pi}{2}x) + \frac{2}{7\pi}\sin(\frac{7\pi}{2}x) + \ldots = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sin((2i-1)\frac{\pi}{2}x)}{2i-1}.$$

IV. Übersicht (periodisch stückweise konstante Funktion):

Funktion f(x) = 1 auf [0; 2), 0 auf [2; 4]; Fouriersumme: n = 10, 100, 1000, 100000 Summanden.







V. Die <u>komplexe Form der Fourierreihe</u> ergibt sich aus der Eulerschen Formel $e^{ix} = \cos(x)+i\cdot\sin(x)$ und deren Folgerungen: $\cos(x) = (e^{ix}+e^{-ix})/2$, $\sin(x) = -i(e^{ix}-e^{-ix})/2$ mit $i = \sqrt{-1}$ als imaginärer Einheit. Mit den reellen Fourierkoeffizienten a_0, a_k, b_k, k = 1, 2, … folgt nämlich für eine T-periodische, auf dem Intervall [0, T] stückweise definierte, stetige und monotone Funktion f(x) mit endlich vielen Sprungstellen aus:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)],\ \omega = \frac{2\pi}{T}$$

vermöge $c_0 = \frac{a_0}{2}$, $c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$, $c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2} = \overline{c_k}$ (als konjugiert komplexe Zahl zu c_k):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[\frac{a_k - ib_k}{2} e^{k\omega x} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-k\omega x}] = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[c_k e^{k\omega x} + \overline{c_k} e^{-k\omega x}] =$$

$$c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[c_k e^{k\omega x} + c_{-k} e^{-k\omega x}] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{k\omega x},\ \omega = \frac{2\pi}{T}$$

mit:

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\cdot e^{-k\omega x} dx,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

VI. Die komplexen <u>Fourierkoeffizienten</u> lauten:

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2} = \frac{0 - i\cdot\frac{1-(-1)^k}{k\pi}}{2} = -i\cdot\frac{1-(-1)^k}{2k\pi}$$

$$c_{-k} = \overline{c_k} = \frac{a_k + ib_k}{2} = \frac{0 + i\cdot\frac{1-(-1)^k}{k\pi}}{2} = i\cdot\frac{1-(-1)^k}{2k\pi}$$

(k = 1, 2, …) mit $c_k = 0$, $c_{-k} = 0$ für gerade k = 2, 4, …

VI. Die <u>komplexe Form der Fourierreihe</u> bestimmt sich mit $\omega = \frac{\pi}{2}$ als:

f(x) = $c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[c_k e^{k\omega x} + c_{-k} e^{-k\omega x}] = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[\frac{-i(1-(-1)^k)}{2k\pi} e^{\frac{k\pi}{2}x} + \frac{i(1-(-1)^k)}{2k\pi} e^{-\frac{k\pi}{2}x}] =$

$$\frac{1}{2} + \frac{i}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-(-1)^k)}{k}\left(e^{-\frac{k\pi}{2}x} - e^{\frac{k\pi}{2}x}\right) = \frac{1}{2} + \frac{i}{2\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2}{2i-1}\left(e^{-\frac{(2i-1)\pi}{2}x} - e^{\frac{(2i-1)\pi}{2}x}\right) =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{i}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2i-1}\left(e^{-\frac{(2i-1)\pi}{2}x} - e^{\frac{(2i-1)\pi}{2}x}\right) = \frac{1}{2} + \frac{i}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{e^{-\frac{(2i-1)\pi}{2}x} - e^{\frac{(2i-1)\pi}{2}x}}{2i-1}.$$

www.michael-buhlmann.de / 12.2024 / Aufgabe 2279