Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Fourierreihen
> Stückweise konstante Funktion

Aufgabe: Bestimme die reelle Form der Fourierreihe zu der T-periodischen Funktion

$$f(x) = \begin{Bmatrix} a & 0 \le x < T/2 \\ b & T/2 \le x < T \end{Bmatrix}$$

auf dem Intervall [0; T]. Wie lautet die Fourierreihe, wenn die Funktion

$$f(x) = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \le x < 2 \\ 0 & 2 \le x < 4 \end{Bmatrix}$$

auf dem Intervall [0; 4] gegeben ist?

Lösung: I. Allgemein gilt: Eine T-periodische, auf dem Intervall [0, T] stückweise definierte, stetige und monotone Funktion f(x) mit endlich vielen Sprungstellen soll in eine <u>reelle Fourierreihe</u>, also in eine unendliche trigonometrische Reihe der Form:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)]\,,\ \omega = \frac{2\pi}{T}$$

entwickelt werden. Die Fourier-Koeffizienten der Reihe berechnen sich dann als:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)dx\,,\ a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cdot\cos(k\omega x)dx\,,\ b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cdot\sin(k\omega x)dx.$$

Dabei gilt für eine gerade Funktion f(x) (also mit f(-x) = f(x)) die Darstellung:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega x)\,,\ b_k = 0\,,$$

für eine ungerade Funktion f(x) (also mit f(-x) = -f(x)):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega x)\,,\ a_k = 0\,.$$

Die Partialsumme

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)]$$

heißt <u>trigonometrische Summe</u> (trigonometrisches Polynom, Fouriersumme).

II. Zu der T-periodischen Funktion

$$f(x) = \begin{Bmatrix} a & 0 \le x < T/2 \\ b & T/2 \le x < T \end{Bmatrix}$$

auf dem Intervall [0; T] sind die nachstehend berechneten Integrale die <u>Fourierkoeffizienten</u> a_0, a_k, b_k, k = 1, 2, …:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)dx = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} a dx + \frac{2}{T}\int_{T/2}^{T} b dx = \frac{2}{T}[ax]_0^{T/2} + \frac{2}{T}[bx]_{T/2}^{T} =$$

$$\frac{2}{T}(a\cdot\frac{T}{2}-0)+\frac{2}{T}(b\cdot T - b\cdot\frac{T}{2}) = a+b$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cdot\cos(\frac{2k\pi}{T}x)dx = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} a\cdot\cos(\frac{2k\pi}{T}x)dx + \frac{2}{T}\int_{T/2}^{T} b\cdot\cos(\frac{2k\pi}{T}x)dx =$$

$$\frac{2a}{T}\int_0^{T/2}\cos(\frac{2k\pi}{T}x)dx + \frac{2b}{T}\int_{T/2}^{T}\cos(\frac{2k\pi}{T}x)dx =$$

$$\frac{2a}{T}\left[\frac{T}{2k\pi}\sin(\frac{2k\pi}{T}x)\right]_0^{T/2} + \frac{2b}{T}\left[\frac{T}{2k\pi}\sin(\frac{2k\pi}{T}x)\right]_{T/2}^{T} =$$

$$\frac{a}{k\pi}\left[\sin(\frac{2k\pi}{T}x)\right]_0^{T/2} + \frac{b}{k\pi}\left[\sin(\frac{2k\pi}{T}x)\right]_{T/2}^{T} =$$

$$\frac{a}{k\pi}\left(\sin(\frac{2k\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}) - \sin(0)\right) + \frac{b}{k\pi}\left(\sin(\frac{2k\pi}{T}\cdot T) - \sin(\frac{2k\pi}{T}\cdot\frac{T}{2})\right) =$$

$$\frac{a}{k\pi}\sin(k\pi) + \frac{b}{k\pi}\left(\sin(2k\pi) - \sin(k\pi)\right) = 0+0=0$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cdot\sin(\frac{2k\pi}{T}x)dx = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} a\cdot\sin(\frac{2k\pi}{T}x)dx + \frac{2}{T}\int_{T/2}^{T} b\cdot\sin(\frac{2k\pi}{T}x)dx =$$

$$\frac{2a}{T}\int_0^{T/2}\sin(\frac{2k\pi}{T}x)dx + \frac{2b}{T}\int_{T/2}^{T}\sin(\frac{2k\pi}{T}x)dx =$$

$$\frac{2a}{T}\left[-\frac{T}{2k\pi}\cos(\frac{2k\pi}{T}x)\right]_0^{T/2} + \frac{2b}{T}\left[-\frac{T}{2k\pi}\cos(\frac{2k\pi}{T}x)\right]_{T/2}^{T} =$$

$$-\frac{a}{k\pi}\left[\cos(\frac{2k\pi}{T}x)\right]_0^{T/2} - \frac{b}{k\pi}\left[\cos(\frac{2k\pi}{T}x)\right]_{T/2}^{T} =$$

$$-\frac{a}{k\pi}\left(\cos(\frac{2k\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}) - \cos(0)\right) - \frac{b}{k\pi}\left(\cos(\frac{2k\pi}{T}\cdot T) - \cos(\frac{2k\pi}{T}\cdot\frac{T}{2})\right) =$$

$$-\frac{a}{k\pi}\left(\cos(k\pi)-1\right) - \frac{b}{k\pi}\left(\cos(2k\pi)-\cos(k\pi)\right) =$$

$$-\frac{a}{k\pi}\left((-1)^k-1\right) - \frac{b}{k\pi}\left(1-(-1)^k\right) = \frac{a}{k\pi}\left(1-(-1)^k\right) - \frac{b}{k\pi}\left(1-(-1)^k\right) = \frac{1-(-1)^k}{k\pi}(a-b)$$

Alle Koeffizienten a_k, k = 1, 2, … verschwinden also, ebenso die Koeffizienten b_k mit geradem k = 2, 4, …

III. Die (allgemeine) Fourierreihe für beliebige reelle Zahlen a, b bestimmt sich damit als:

f(x) = $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega x) = \frac{a+b}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{k\pi}(a-b)\sin(\frac{2k\pi}{T}x) =$

$$\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{k}\sin(\frac{2k\pi}{T}x) \; (*).$$

IV. Für die Funktion f(x) = $\begin{Bmatrix} 1 & 0 \le x < 2 \\ 0 & 2 \le x < 4 \end{Bmatrix}$ mit Periode T = 4 und mit $\omega = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ ist:

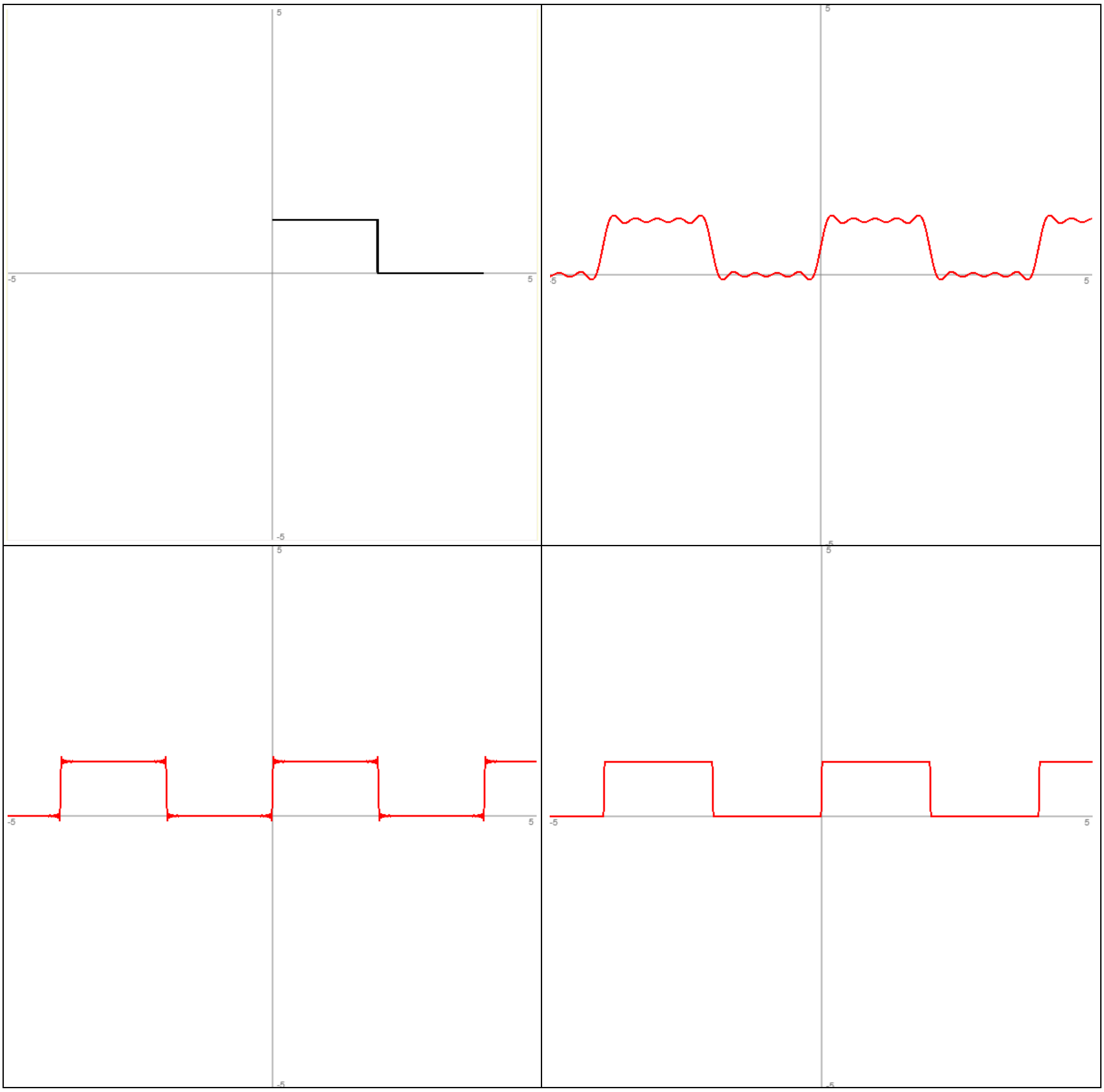
a = 1, b = 0,

so dass Einsetzen der beiden Parameter in die allgemeine Fourierreihe (*) die nachstehende <u>Fourierreihe</u> ergibt:

f(x) = $\frac{1+0}{2} + \frac{1-0}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{k}\sin(\frac{k\pi}{2}x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{k}\sin(\frac{k\pi}{2}x)$.

V. <u>Übersicht</u> (periodisch stückweise konstante Funktion):

Funktion f(x) = 1 auf [0; 2), 0 auf [2; 4]; Fouriersumme: n = 10, 100, 1000, 100000 Summanden.



www.michael-buhlmann.de / 12.2024 / Aufgabe 2280