Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Fourierreihen
> Stückweise konstante Funktion

Aufgabe: Bestimme die reelle Form der Fourierreihe zu der T-periodischen Funktion

$$f(x) = \begin{Bmatrix} a & 0 \le x < T^* \\ b & T^* \le x < T \end{Bmatrix}$$

auf dem Intervall [0; T], 0<T*<T.

Lösung: I. Allgemein gilt: Eine T-periodische, auf dem Intervall [0, T] stückweise definierte, stetige und monotone Funktion f(x) mit endlich vielen Sprungstellen soll in eine reelle Fourierreihe, also in eine unendliche trigonometrische Reihe der Form:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)],\ \omega = \frac{2\pi}{T}$$

entwickelt werden. Die Fourier-Koeffizienten der Reihe berechnen sich dann als:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)dx,\ a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cdot\cos(k\omega x)dx,\ b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cdot\sin(k\omega x)dx.$$

Dabei gilt für eine gerade Funktion f(x) (also mit f(-x) = f(x)) die Darstellung:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega x),\ b_k = 0,$$

für eine ungerade Funktion f(x) (also mit f(-x) = -f(x)):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega x),\ a_k = 0.$$

Die Partialsumme

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)]$$

heißt trigonometrische Summe (trigonometrisches Polynom, Fouriersumme).

II. Zu der T-periodischen Funktion

$$f(x) = \begin{Bmatrix} a & 0 \le x < T^* \\ b & T^* \le x < T \end{Bmatrix}$$

auf dem Intervall [0; T] sind die nachstehend berechneten Integrale die Fourierkoeffizienten a_0, a_k, b_k, k = 1, 2, …:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)dx = \frac{2}{T}\int_0^{T^*} adx + \frac{2}{T}\int_{T^*}^{T} bdx = \frac{2}{T}[ax]_0^{T^*} + \frac{2}{T}[bx]_{T/2\ T^*}^{T} =$$

$$\frac{2}{T}(a\cdot T^* - 0) + \frac{2}{T}(b\cdot T - b\cdot T^*) = 2a\cdot\frac{T^*}{T} + 2b - 2b\cdot\frac{T^*}{T} = 2b + 2\cdot\frac{T^*}{T}(a-b)$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cdot\cos(\frac{2k\pi}{T}x)dx = \frac{2}{T}\int_0^{T*} a\cdot\cos(\frac{2k\pi}{T}x)dx + \frac{2}{T}\int_{T*}^{T} b\cdot\cos(\frac{2k\pi}{T}x)dx =$$

$$\frac{2a}{T}\int_0^{T*}\cos(\frac{2k\pi}{T}x)dx + \frac{2b}{T}\int_{T*}^{T}\cos(\frac{2k\pi}{T}x)dx =$$

$$\frac{2a}{T}\left[\frac{T}{2k\pi}\sin(\frac{2k\pi}{T}x)\right]_0^{T*} + \frac{2b}{T}\left[\frac{T}{2k\pi}\sin(\frac{2k\pi}{T}x)\right]_{T*}^{T} =$$

$$\frac{a}{k\pi}\left[\sin(\frac{2k\pi}{T}x)\right]_0^{T*} + \frac{b}{k\pi}\left[\sin(\frac{2k\pi}{T}x)\right]_{T*}^{T} =$$

$$\frac{a}{k\pi}\left(\sin(\frac{2k\pi}{T}\cdot T*) - \sin(0)\right) + \frac{b}{k\pi}\left(\sin(\frac{2k\pi}{T}\cdot T) - \sin(\frac{2k\pi}{T}\cdot T*)\right) =$$

$$\frac{a}{k\pi}\left(\sin(\frac{2k\pi}{T}\cdot T*) - \sin(0)\right) + \frac{b}{k\pi}\left(\sin(2k\pi) - \sin(\frac{2k\pi}{T}\cdot T*)\right) =$$

$$\frac{a}{k\pi}\sin(\frac{2k\pi}{T}\cdot T*) - \frac{b}{k\pi}\sin(\frac{2k\pi}{T}\cdot T*) = \left(\frac{a}{k\pi} - \frac{b}{k\pi}\right)\sin(\frac{2k\pi}{T}\cdot T*) = \frac{a-b}{k\pi}\sin(\frac{2k\pi}{T}\cdot T*)$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cdot\sin(\frac{2k\pi}{T}x)dx = \frac{2}{T}\int_0^{T*} a\cdot\sin(\frac{2k\pi}{T}x)dx + \frac{2}{T}\int_{T*}^{T} b\cdot\sin(\frac{2k\pi}{T}x)dx =$$

$$\frac{2a}{T}\int_0^{T*}\sin(\frac{2k\pi}{T}x)dx + \frac{2b}{T}\int_{T*}^{T}\sin(\frac{2k\pi}{T}x)dx =$$

$$\frac{2a}{T}\left[-\frac{T}{2k\pi}\cos(\frac{2k\pi}{T}x)\right]_0^{T*} + \frac{2b}{T}\left[-\frac{T}{2k\pi}\cos(\frac{2k\pi}{T}x)\right]_{T*}^{T} =$$

$$-\frac{a}{k\pi}\left[\cos(\frac{2k\pi}{T}x)\right]_0^{T*} - \frac{b}{k\pi}\left[\cos(\frac{2k\pi}{T}x)\right]_{T*}^{T} =$$

$$-\frac{a}{k\pi}\left(\cos(\frac{2k\pi}{T}\cdot T*) - \cos(0)\right) - \frac{b}{k\pi}\left(\cos(\frac{2k\pi}{T}\cdot T) - \cos(\frac{2k\pi}{T}\cdot T*)\right) =$$

$$-\frac{a}{k\pi}\left(\cos(\frac{2k\pi}{T}\cdot T*) - \cos(0)\right) - \frac{b}{k\pi}\left(\cos(2k\pi) - \cos(\frac{2k\pi}{T}\cdot T*)\right) =$$

$$-\frac{a}{k\pi}\left(\cos(\frac{2k\pi}{T}\cdot T*) - 1\right) - \frac{b}{k\pi}\left(1 - \cos(\frac{2k\pi}{T}\cdot T*)\right) =$$

$$\frac{a}{k\pi}\left(1 - \cos(\frac{2k\pi}{T}\cdot T*)\right) - \frac{b}{k\pi}\left(1 - \cos(\frac{2k\pi}{T}\cdot T*)\right) = \left(\frac{a}{k\pi} - \frac{b}{k\pi}\right)\left(1 - \cos(\frac{2k\pi}{T}\cdot T*)\right) =$$

$$\frac{a-b}{k\pi}\left(1 - \cos(\frac{2k\pi}{T}\cdot T*)\right)$$

III. Die (allgemeine) <u>Fourierreihe</u> für beliebige reelle Zahlen a, b bestimmt sich damit als:

f(x) = $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos(k\omega x) + b_k\sin(k\omega x)] =$

$$b + \frac{T*}{T}(a-b) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{a-b}{k\pi}\sin(\frac{2k\pi}{T}\cdot T*)\cos(\frac{2k\pi}{T}x) + \frac{a-b}{k\pi}\left(1 - \cos(\frac{2k\pi}{T}\cdot T*)\right)\sin(\frac{2k\pi}{T}x)\right] =$$

$$b+\frac{T^*}{T}(a-b)+\frac{a-b}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k}\sin(\frac{2k\pi}{T}\cdot T^*)\cos(\frac{2k\pi}{T}x)+\frac{1}{k}\left(1-\cos(\frac{2k\pi}{T}\cdot T^*)\right)\sin(\frac{2k\pi}{T}x)\right].$$

IV. Wir betrachten noch die folgenden Spezialfälle hinsichtlich der Teilung T* der Periode T. Ist T* = T/2, so folgt:

$$f(x) = b+\frac{T/2}{T}(a-b)+\frac{a-b}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k}\sin(\frac{2k\pi}{T}\cdot\frac{T}{2})\cos(\frac{2k\pi}{T}x)+\frac{1}{k}\left(1-\cos(\frac{2k\pi}{T}\cdot\frac{T}{2})\right)\sin(\frac{2k\pi}{T}x)\right]=$$

$$\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k}\sin(k\pi)\cos(\frac{2k\pi}{T}x)+\frac{1}{k}\left(1-\cos(k\pi)\right)\sin(\frac{2k\pi}{T}x)\right]=$$

$$\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k}\left(1-(-1)^k\right)\sin(\frac{2k\pi}{T}x)\right]=\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{k}\sin(\frac{2k\pi}{T}x)=$$

$$\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2}{2i-1}\sin(\frac{2(2i-1)\pi}{T}x)=\frac{a+b}{2}+\frac{2(a-b)}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sin(\frac{2(2i-1)\pi}{T}x)}{2i-1}.$$

Ist T* = T/4, so gilt:

$$f(x) = b+\frac{T/4}{T}(a-b)+\frac{a-b}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k}\sin(\frac{2k\pi}{T}\cdot\frac{T}{4})\cos(\frac{2k\pi}{T}x)+\frac{1}{k}\left(1-\cos(\frac{2k\pi}{T}\cdot\frac{T}{4})\right)\sin(\frac{2k\pi}{T}x)\right]=$$

$$\frac{a+3b}{4}+\frac{a-b}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k}\sin(\frac{k\pi}{2})\cos(\frac{2k\pi}{T}x)+\frac{1}{k}\left(1-\cos(\frac{k\pi}{2})\right)\sin(\frac{2k\pi}{T}x)\right]=$$

$$\frac{a+3b}{2}+\frac{a-b}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i-1}}{2i-1}\left(\cos(\frac{2(2i-1)\pi}{T}x)+\sin(\frac{2(2i-1)\pi}{T}x)\right)+\frac{a-b}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2i-1}\sin(\frac{2(4i-2)\pi}{T}x).$$

www.michael-buhlmann.de / 12.2024 / Aufgabe 2281