

# Mathematikaufgaben

## > Funktionen

## > Geraden

---

**Aufgabe:** Bestimme den Schnittpunkt der Geraden:

$$g: y = 2x - 3$$

$$h: y = -\frac{1}{2}x + 2$$

zeichnerisch und rechnerisch.

**Lösung:** I. a) Die Funktionsvorschrift einer Geraden als linearer Funktion ist ein (Funktions-) Term von der Form  $y = mx + b$  mit der unabhängigen Variablen  $x$  und der abhängigen Variablen  $y$  (Geradengleichung). Die reelle Zahl  $m$  bezeichnet die Steigung, die Zahl  $b$  den  $y$ -Achsenabschnitt der Geraden. Da durch zwei Punkte im kartesischen Koordinatensystem genau eine Gerade geht, kann mit Hilfe der Punkte  $P(0|b)$  ( $y$ -Achsenabschnittspunkt) und  $Q(1|m+b)$  (Steigungsdreieck der Geraden) die Gerade gezeichnet werden. Bei zwei gezeichneten Geraden  $g$  und  $h$  lässt sich zeichnerisch der Schnittpunkt  $S(x_S|y_S)$  ermitteln, Nichtparallelität der Geraden vorausgesetzt.

b) Rechnerisch lässt sich der Schnittpunkt zweier Geraden in seiner  $x$ -Koordinate durch Gleichsetzen der Geradengleichungen  $g: y = m_1x + b_1$  und  $h: y = m_2x + b_2$  ermitteln, also:

$$m_1x + b_1 = m_2x + b_2 \Rightarrow m_1x - m_2x = b_2 - b_1 \Rightarrow (m_1 - m_2)x = b_2 - b_1 \Rightarrow x_S = \frac{b_2 - b_1}{m_2 - m_1}.$$

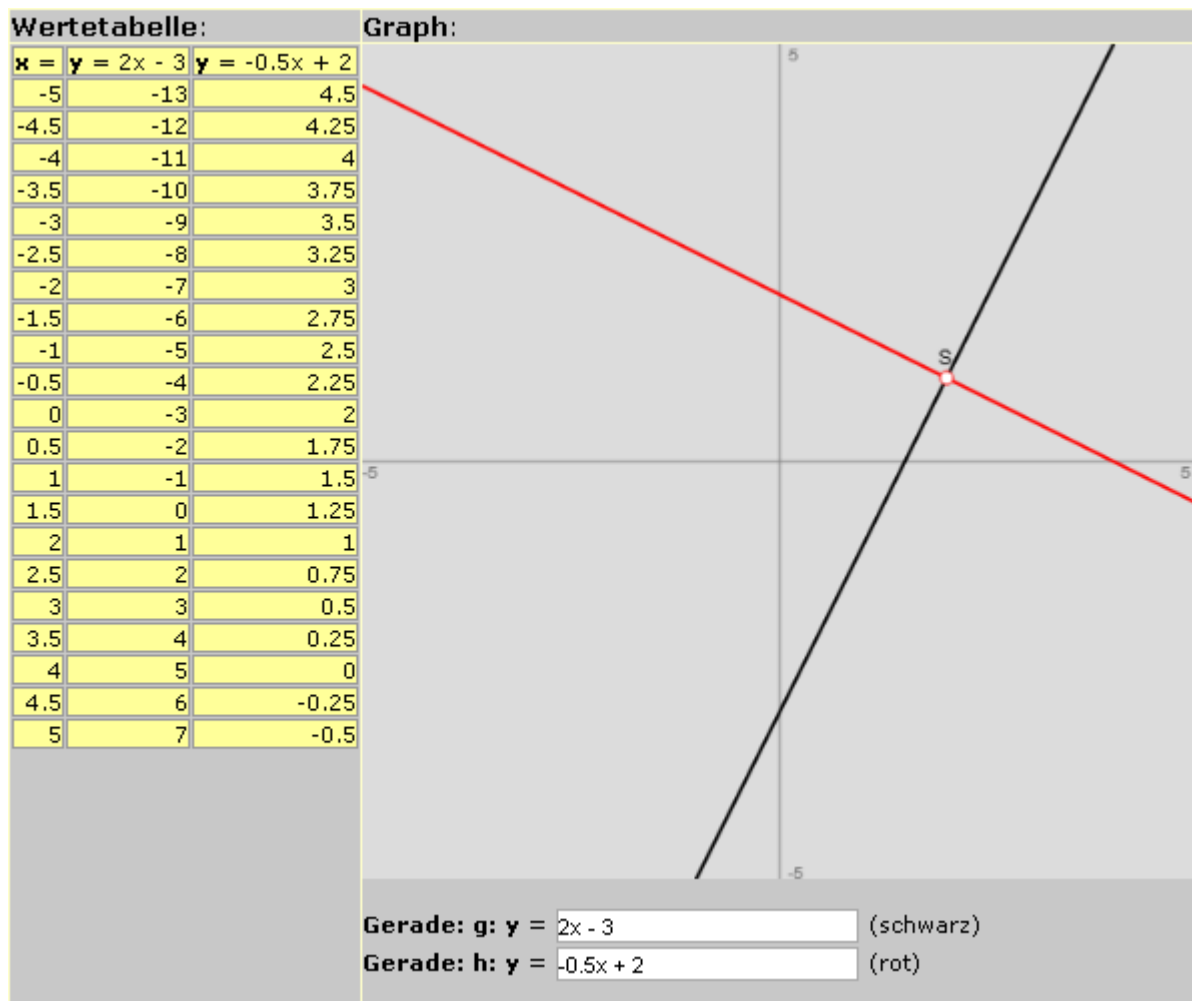
Einsetzen in die Geradengleichung von  $g$  oder  $h$  ergibt die  $y$ -Koordinate des Schnittpunkts, also:

$$y_S = m_1x_S + b_1 = m_1 \frac{b_2 - b_1}{m_2 - m_1} + b_1 = m_2x_S + b_2 = m_2 \frac{b_2 - b_1}{m_2 - m_1} + b_2.$$

Der Schnittpunkt lautet dann:  $S(x_S|y_S)$ .

II. Für die zeichnerische Lösung sind Wertetabellen und Graphen der Geraden  $g: y = 2x - 3$  und

$h: y = -\frac{1}{2}x + 2$ :



Ablesen des Schnittpunktes aus der Zeichnung ergibt:  $S(2|1)$ .

III. Rechnerisch gehen wir wie folgt vor: Gleichsetzen der Geradengleichungen von  $g: y = 2x - 3$

und  $h: y = -\frac{1}{2}x + 2$  ( $y = y$ ) führt auf die Gleichung und deren Umformungen:

$$\begin{aligned}
 2x - 3 &= -\frac{1}{2}x + 2 && | +0,5x \\
 2,5x - 3 &= 2 && | +3 \\
 2,5x &= 5 && | :2,5 \\
 x &= 2.
 \end{aligned}$$

Die x-Koordinate des Schnittpunktes ist damit:  $x_S = 2$ . Einsetzen von  $x_S=2$  z.B. in die Geradengleichung  $g: y = 2x - 3$  ergibt:

$$y_S = 2 \cdot 2 - 3 = 4 - 3 = 1,$$

so dass  $S(2|1)$  der Schnittpunkt der beiden Geraden  $g$  und  $h$  ist.