

Mathematikaufgaben

> Funktionen

> Geraden

Aufgabe: Bestimme den Schnittpunkt der Geraden:

$$g: y = 2x - 3$$

$$h: y = -\frac{1}{2}x + 2$$

zeichnerisch und rechnerisch.

Lösung: I. a) Die Funktionsvorschrift einer Geraden als linearer Funktion ist ein (Funktions-) Term von der Form $y = mx + b$ mit der unabhängigen Variablen x und der abhängigen Variablen y (Geradengleichung). Die reelle Zahl m bezeichnet die Steigung, die Zahl b den y -Achsenabschnitt der Geraden. Da durch zwei Punkte im kartesischen Koordinatensystem genau eine Gerade geht, kann mit Hilfe der Punkte $P(0|b)$ (y -Achsenabschnittspunkt) und $Q(1|m+b)$ (Steigungsdreieck der Geraden) die Gerade gezeichnet werden. Bei zwei gezeichneten Geraden g und h lässt sich zeichnerisch der Schnittpunkt $S(x_S|y_S)$ ermitteln, Nichtparallelität der Geraden vorausgesetzt.

b) Rechnerisch lässt sich der Schnittpunkt zweier Geraden in seiner x -Koordinate durch Gleichsetzen der Geradengleichungen $g: y = m_1x + b_1$ und $h: y = m_2x + b_2$ ermitteln, also:

$$m_1x + b_1 = m_2x + b_2 \Rightarrow m_1x - m_2x = b_2 - b_1 \Rightarrow (m_1 - m_2)x = b_2 - b_1 \Rightarrow x_S = \frac{b_2 - b_1}{m_2 - m_1}.$$

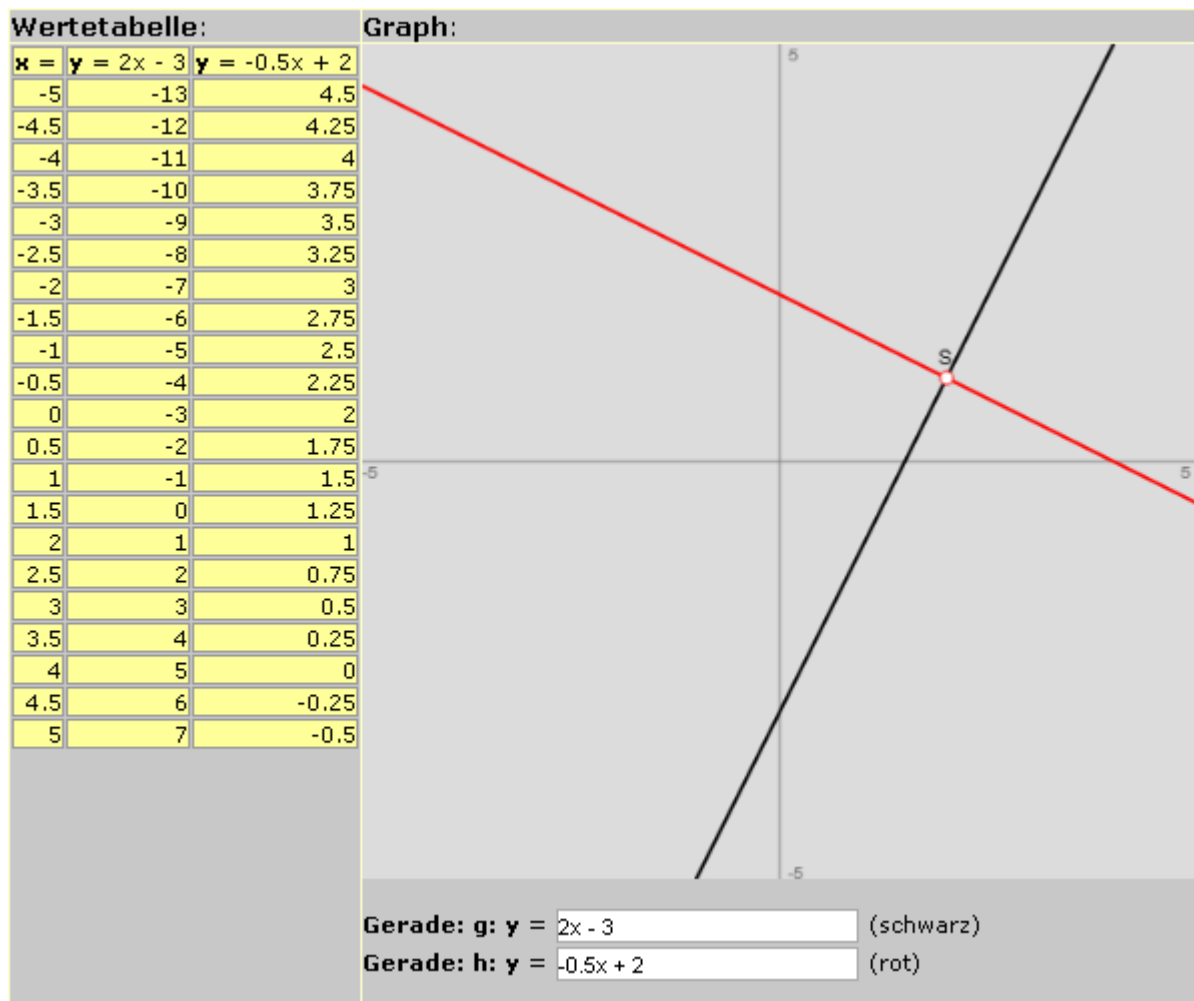
Einsetzen in die Geradengleichung von g oder h ergibt die y -Koordinate des Schnittpunkts, also:

$$y_S = m_1x_S + b_1 = m_1 \frac{b_2 - b_1}{m_2 - m_1} + b_1 = m_2x_S + b_2 = m_2 \frac{b_2 - b_1}{m_2 - m_1} + b_2.$$

Der Schnittpunkt lautet dann: $S(x_S|y_S)$.

II. Für die zeichnerische Lösung sind Wertetabellen und Graphen der Geraden $g: y = 2x - 3$ und

$h: y = -\frac{1}{2}x + 2$:



Ablesen des Schnittpunktes aus der Zeichnung ergibt: $S(2|1)$.

III. Rechnerisch gehen wir wie folgt vor: Gleichsetzen der Geradengleichungen von $g: y = 2x - 3$

und $h: y = -\frac{1}{2}x + 2$ ($y = y$) führt auf die Gleichung und deren Umformungen:

$$\begin{aligned}
 2x - 3 &= -\frac{1}{2}x + 2 && | +0,5x \\
 2,5x - 3 &= 2 && | +3 \\
 2,5x &= 5 && | :2,5 \\
 x &= 2.
 \end{aligned}$$

Die x-Koordinate des Schnittpunktes ist damit: $x_S = 2$. Einsetzen von $x_S=2$ z.B. in die Geradengleichung $g: y = 2x - 3$ ergibt:

$$y_S = 2 \cdot 2 - 3 = 4 - 3 = 1,$$

so dass $S(2|1)$ der Schnittpunkt der beiden Geraden g und h ist.