

Mathematikaufgaben

> Funktionen

> Geraden

Aufgabe: Bestimme den Schnittpunkt der Geraden:

$$g: y = \frac{3}{4}x - 4$$

$$h: y = \frac{3}{2}x + 2$$

zeichnerisch und rechnerisch.

Lösung: I. a) Die Funktionsvorschrift einer Geraden als linearer Funktion ist ein (Funktions-) Term von der Form $y = mx + b$ mit der unabhängigen Variablen x und der abhängigen Variablen y (Geradengleichung). Die reelle Zahl m bezeichnet die Steigung, die Zahl b den y -Achsenabschnitt der Geraden. Da durch zwei Punkte im kartesischen Koordinatensystem genau eine Gerade geht, kann mit Hilfe der Punkte $P(0|b)$ (y -Achsenabschnittspunkt) und $Q(1|m+b)$ (Steigungsdreieck der Geraden) die Gerade gezeichnet werden. Bei zwei gezeichneten Geraden g und h lässt sich zeichnerisch der Schnittpunkt $S(x_S|y_S)$ ermitteln, Nichtparallelität der Geraden vorausgesetzt.

b) Rechnerisch lässt sich der Schnittpunkt zweier Geraden in seiner x -Koordinate durch Gleichsetzen der Geradengleichungen $g: y = m_1x + b_1$ und $h: y = m_2x + b_2$ ermitteln, also:

$$m_1x + b_1 = m_2x + b_2 \Rightarrow m_1x - m_2x = b_2 - b_1 \Rightarrow (m_1 - m_2)x = b_2 - b_1 \Rightarrow x_S = \frac{b_2 - b_1}{m_2 - m_1}.$$

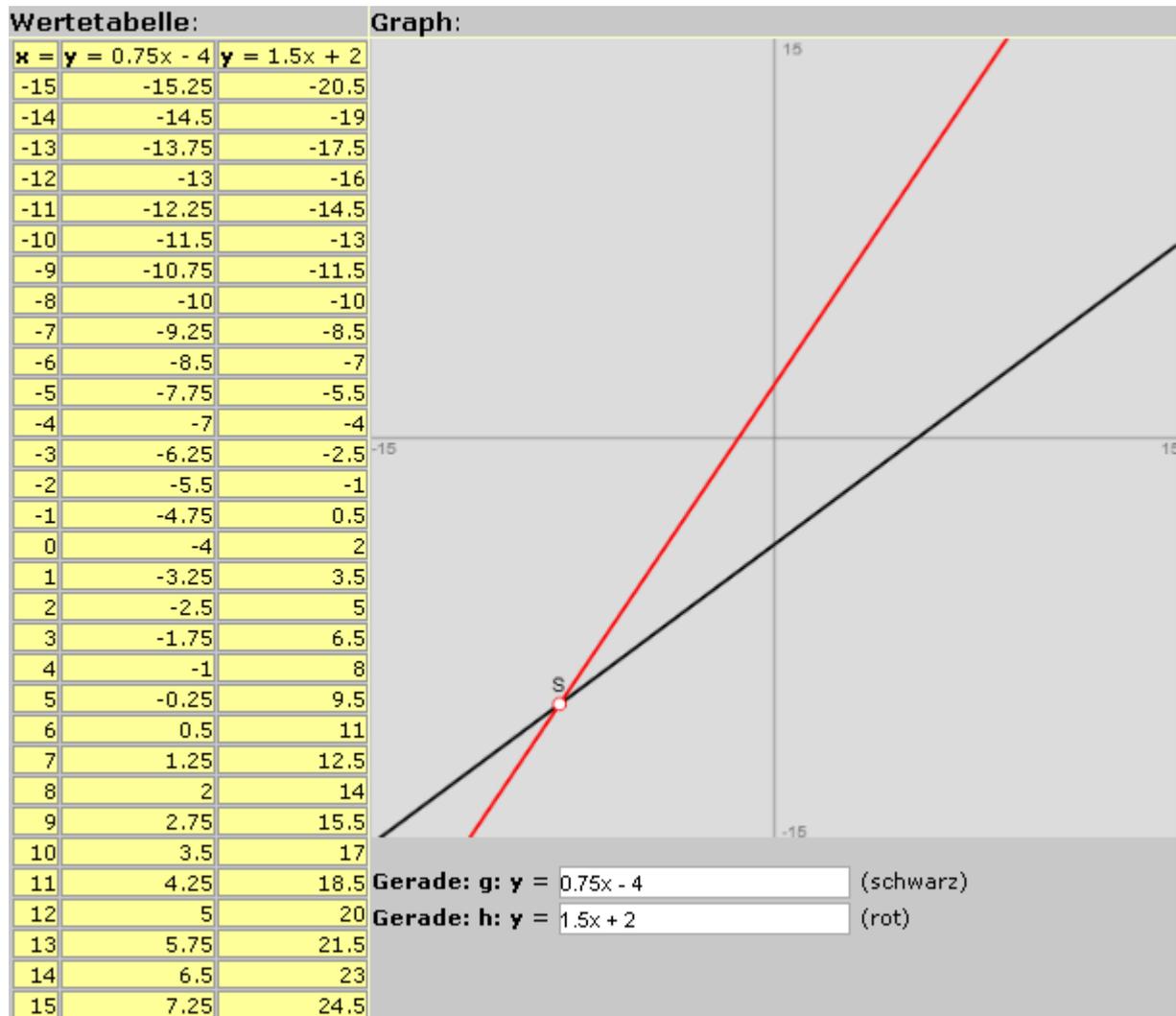
Einsetzen in die Geradengleichung von g oder h ergibt die y -Koordinate des Schnittpunkts, also:

$$y_S = m_1x_S + b_1 = m_1 \frac{b_2 - b_1}{m_2 - m_1} + b_1 = m_2x_S + b_2 = m_2 \frac{b_2 - b_1}{m_2 - m_1} + b_2.$$

Der Schnittpunkt lautet dann: $S(x_S|y_S)$.

II. Für die zeichnerische Lösung sind Wertetabellen und Graphen der Geraden $g: y = \frac{3}{4}x - 4$ und

$h: y = \frac{3}{2}x + 2$:



Ablesen des Schnittpunktes aus der Zeichnung ergibt: $S(-8|-10)$.

III. Rechnerisch gehen wir wie folgt vor: Gleichsetzen der Geradengleichungen von $g: y = \frac{3}{4}x - 4$

und $h: y = \frac{3}{2}x + 2$ ($y = y$) führt auf die Gleichung und deren Umformungen:

$$\frac{3}{4}x - 4 = \frac{3}{2}x + 2 \quad (\text{Umwandlung der Brüche in Dezimalzahlen})$$

$$0,75x - 4 = 1,5x + 2 \quad | -0,75x$$

$$-4 = 0,75x + 2 \quad | -2$$

$$-6 = 0,75x \quad | :0,75$$

$$x = -8.$$

Die x-Koordinate des Schnittpunktes ist damit: $x_S = -8$. Einsetzen von $x_S = -8$ z.B. in die Geradengleichung $h: y = \frac{3}{2}x + 2 = 1,5x + 2$ ergibt:

$$y_S = 1,5 \cdot (-8) + 2 = -12 + 2 = -10,$$

$$y_S = 1,5 \cdot (-8) + 2 = -12 + 2 = -10,$$

so dass $S(-8|-10)$ der Schnittpunkt der beiden Geraden g und h ist.