Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Funktionen
> Geraden

Aufgabe: Bestimme Schnittpunkt und Schnittwinkel der Geraden:

$$\text{g: } y=\frac{5}{2}x-4$$
$$\text{h: } y=2$$

rechnerisch.

1. Lösung: I. Allgemein gilt: a) Rechnerisch lässt sich der Schnittpunkt zweier Geraden in seiner x-Koordinate durch Gleichsetzen der Geradengleichungen g: $y = m_1x + b_1$ und h: $y = m_2x + b_2$ ermitteln, also:

$m_1x + b_1 = m_2x + b_2$ => $m_1x – m_2x = b_2 – b_1$ => $(m_1–m_2)x = b_2 – b_1$ => $x_S=\frac{b_2-b_1}{m_2-m_1}$.

Einsetzen in die Geradengleichung von g oder h ergibt die y-Koordinate des Schnittpunkts, also:

$$y_S=m_1x_S+b_1=m_1\frac{b_2-b_1}{m_2-m_1}+b_1=m_2x_S+b_2=m_2\frac{b_2-b_1}{m_2-m_1}+b_2 .$$

Der Schnittpunkt lautet dann: $S(x_S|y_S)$.

b) Der Schnittwinkel φ zwischen zwei sich schneidenden Geraden g: $y = m_1x + b_1$ und h: $y = m_2x + b_2$ errechnet sich vermöge der Formel:

$$\tan\varphi=\left|\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}\right| .$$

II. Rechnerisch gehen wir wie folgt vor: Gleichsetzen der Geradengleichungen von g: $y=\frac{5}{2}x-4$ und h: $y=2$ (y = y) führt auf die Gleichung und deren Umformungen:

$\frac{5}{2}x-4=2$	(Umwandlung in Dezimalzahlen)
$2,5x – 4 = 2$	$\| +4$
$2,5x = 6$	$\| :2,5$
$x = 2,4$.	

Die x-Koordinate des Schnittpunktes ist damit: $x_S = 2,4$. „Einsetzen“ von $x_S=2,4$ z.B. in die konstante Gerade h: $y=2$ ergibt:

$y_S = 2$,

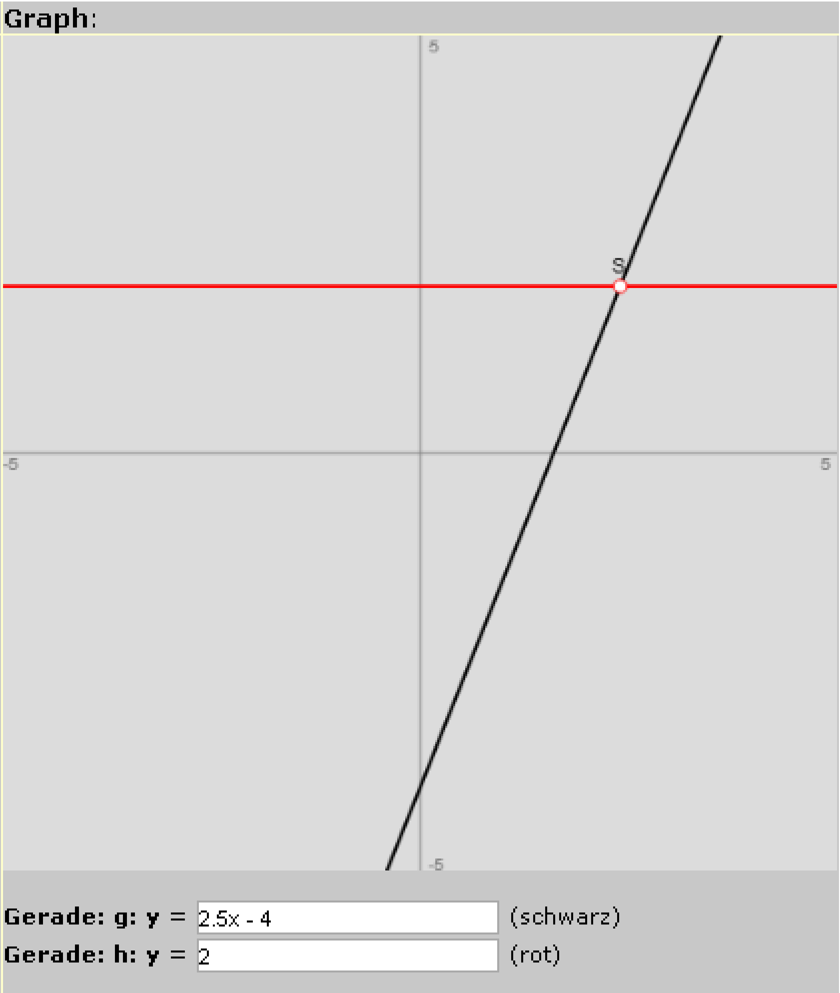
so dass S(2,4|2) der Schnittpunkt der beiden Geraden g und h ist.

III. Mit den Geradengleichungen g: $y=\frac{5}{2}x-4$ und h: $y=2$ und den Steigungen $m_1 = 2,5$ und $m_2 = 0$ folgt für den Schnittwinkel:

$$\tan\varphi=\left|\frac{0-2,5}{1+0\cdot 2,5}\right|=2,5 \text{ => } \varphi = \tan^{-1}(2,5) = 68,2°.$$

Der Schnittwinkel ist wegen der konstanten Gerade h: $y = 2$ mit dem Steigungswinkel der Geraden g: $y = \frac{5}{2}x - 4$ identisch.

IV. Wir führen noch Wertetabellen und Graphen der Geraden g: $y = \frac{5}{2}x - 4$ und h: $y = 2$ an:



Wertetabelle:

x =	y = 2.5x - 4	y = 2
-5	-16.5	2
-4.5	-15.25	2
-4	-14	2
-3.5	-12.75	2
-3	-11.5	2
-2.5	-10.25	2
-2	-9	2
-1.5	-7.75	2
-1	-6.5	2
-0.5	-5.25	2
0	-4	2
0.5	-2.75	2
1	-1.5	2
1.5	-0.25	2
2	1	2
2.5	2.25	2
3	3.5	2
3.5	4.75	2
4	6	2
4.5	7.25	2
5	8.5	2

Der Schnittpunkt ist dann auch laut Zeichnung: S(2,4|2), der Schnittwinkel: φ = 68,2°.

2. Lösung: I. Allgemein gilt: a) Rechnerisch lässt sich der Schnittpunkt zweier Geraden in seiner x-Koordinate durch Gleichsetzen der Geradengleichungen g: $y = m_1x + b_1$ und h: $y = m_2x + b_2$ ermitteln, also:

$m_1x + b_1 = m_2x + b_2$ => $m_1x - m_2x = b_2 - b_1$ => $(m_1 - m_2)x = b_2 - b_1$ => $x_S = \frac{b_2 - b_1}{m_2 - m_1}$.

Einsetzen in die Geradengleichung von g oder h ergibt die y-Koordinate des Schnittpunkts, also:

$$y_S = m_1x_S + b_1 = m_1\frac{b_2 - b_1}{m_2 - m_1} + b_1 = m_2x_S + b_2 = m_2\frac{b_2 - b_1}{m_2 - m_1} + b_2 .$$

Der Schnittpunkt lautet dann: $S(x_S|y_S)$.

b) Der Schnittwinkel φ zwischen zwei sich schneidenden Geraden g: $y = m_1x + b_1$ und h: $y = m_2x + b_2$ errechnet sich aus den (auch negativen) Steigungswinkeln der Geraden:

$\tan\varphi_1 = m_1$ => $\varphi_1 = \tan^{-1}(m_1)$, $\tan\varphi_2 = m_2$ => $\varphi_2 = \tan^{-1}(m_2)$ => $\varphi = |\varphi_2 - \varphi_1|$.

II. Rechnerisch gehen wir wie folgt vor: Gleichsetzen der Geradengleichungen von g: $y = \frac{5}{2}x - 4$ und h: $y = 2$ (y = y) führt auf die Gleichung und deren Umformungen:

$\frac{5}{2}x - 4 = 2$ (Umwandlung in Dezimalzahlen)

2,5x – 4 = 2 | +4

2,5x = 6 | :2,5

x = 2,4.

Die x-Koordinate des Schnittpunktes ist damit: x_S = 2,4. „Einsetzen“ von x_S=2,4 z.B. in die konstante Gerade h: $y = 2$ ergibt:

y_S = 2,

so dass S(2,4|2) der Schnittpunkt der beiden Geraden g und h ist.

III. Mit den Geradengleichungen g: $y = \frac{5}{2}x - 4$ und h: $y = 2$ und den Steigungen m_1 = 2,5 und m_2 = 0 folgt für den Schnittwinkel aus den beiden Steigungswinkeln:

$\tan\varphi_1 = 2{,}5$ => $\varphi_1 = \tan^{-1}(2{,}5) = 68{,}2°$,

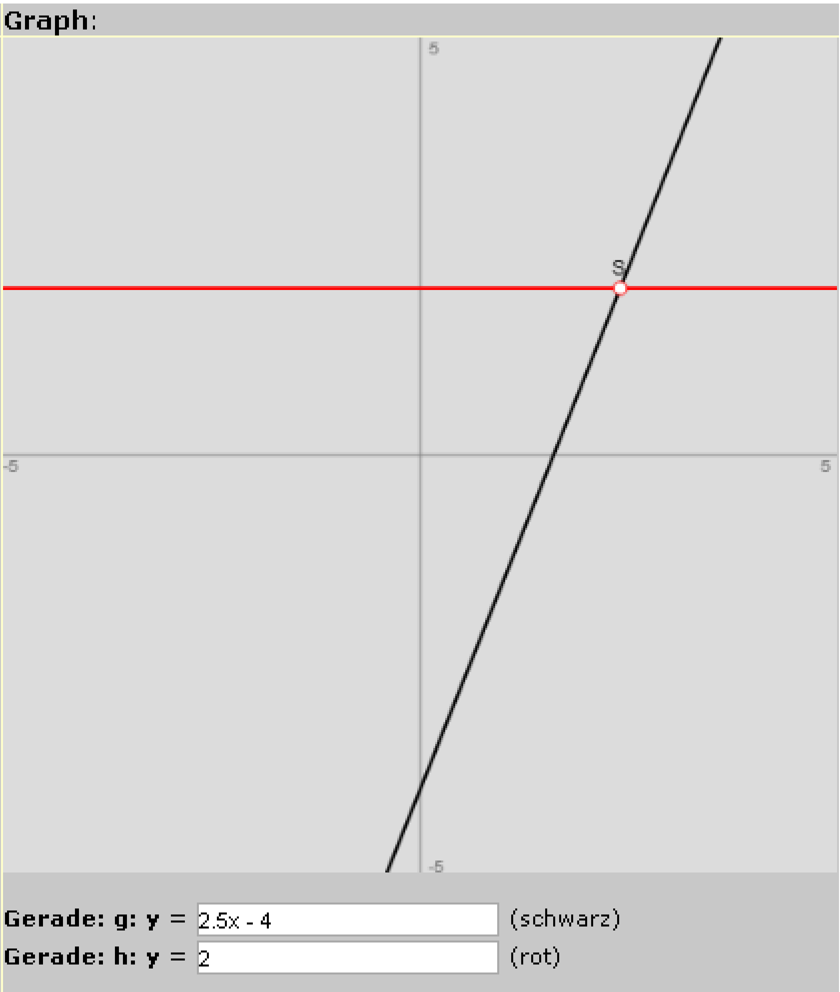
$\tan\varphi_2 = 0$ => $\varphi_2 = \tan^{-1}(0) = 0°$,

woraus sich für den Schnittwinkel $\varphi = |0–68{,}2°| = 68{,}2°$ ergibt. Der Schnittwinkel ist wegen der konstanten Gerade h: $y = 2$ mit dem Steigungswinkel der Geraden g: $y = \frac{5}{2}x - 4$ identisch.

IV. Wir führen noch Wertetabellen und Graphen der Geraden g: $y = \frac{5}{2}x - 4$ und h: $y = 2$ an:

Wertetabelle:

x =	y = 2.5x - 4	y = 2
-5	-16.5	2
-4.5	-15.25	2
-4	-14	2
-3.5	-12.75	2
-3	-11.5	2
-2.5	-10.25	2
-2	-9	2
-1.5	-7.75	2
-1	-6.5	2
-0.5	-5.25	2
0	-4	2
0.5	-2.75	2
1	-1.5	2
1.5	-0.25	2
2	1	2
2.5	2.25	2
3	3.5	2
3.5	4.75	2
4	6	2
4.5	7.25	2
5	8.5	2



Der Schnittpunkt ist dann auch laut Zeichnung: S(2,4|2), der Schnittwinkel: φ = 68,2°.

www.michael-buhlmann.de / 10.2016 / Aufgabe 263