Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Funktionen
> Geraden

Aufgabe: Bestimme Schnittpunkt und Schnittwinkel der Geraden:

g: $y = \frac{3}{2}x$

h: $y = 5 - \frac{5}{2}x$

rechnerisch.

d

1. Lösung: I. Allgemein gilt: a) Rechnerisch lässt sich der <u>Schnittpunkt</u> zweier Geraden in seiner x-Koordinate durch Gleichsetzen der Geradengleichungen g: $y = m_1x + b_1$ und h: $y = m_2x + b_2$ ermitteln, also:

$m_1x + b_1 = m_2x + b_2$ => $m_1x - m_2x = b_2 - b_1$ => $(m_1 - m_2)x = b_2 - b_1$ => $x_S = \frac{b_2 - b_1}{m_2 - m_1}$.

Einsetzen in die Geradengleichung von g oder h ergibt die y-Koordinate des Schnittpunkts, also:

$$y_S = m_1 x_S + b_1 = m_1 \frac{b_2 - b_1}{m_2 - m_1} + b_1 = m_2 x_S + b_2 = m_2 \frac{b_2 - b_1}{m_2 - m_1} + b_2 .$$

Der Schnittpunkt lautet dann: $S(x_S|y_S)$.

b) Der <u>Schnittwinkel</u> φ zwischen zwei sich schneidenden Geraden g: $y = m_1x + b_1$ und h: $y = m_2x + b_2$ errechnet sich vermöge der Formel:

$$\tan\varphi = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right| .$$

II. Rechnerisch gehen wir wie folgt vor: Gleichsetzen der Geradengleichungen von g: $y = \frac{3}{2}x$ und h: $y = 5 - \frac{5}{2}x$ (y = y) führt auf die Gleichung und deren Umformungen:

$\frac{3}{2}x = 5 - \frac{5}{2}x$	(Umwandlung in Dezimalzahlen)
1,5x = 5 – 2,5x	| +2,5x
4x = 5	| :4
x = 1,25.	

Die x-Koordinate des Schnittpunktes ist damit: $x_S = 1,25$. Einsetzen von x_S=1,25 z.B. in die Gerade g: $y = \frac{3}{2}x$ ergibt:

$$y_S = \frac{3}{2} \cdot 1{,}25 = 1{,}5 \cdot 1{,}25 = 1{,}875 ,$$

so dass S(1,25|1,875) der <u>Schnittpunkt</u> der beiden Geraden g und h ist.

III. Mit den Geradengleichungen g: $y=\frac{3}{2}x$ und h: $y=5-\frac{5}{2}x$ und den Steigungen m_1 = 1,5 und m_2 = -2,5 folgt für den Schnittwinkel:

$\tan\varphi=\left|\frac{-2{,}5-1{,}5}{1+1{,}5\cdot(-2{,}5)}\right|=\left|\frac{-4}{-2{,}75}\right|=1{,}4545$ => φ = $\tan^{-1}$(1,4545) = 55,49°.

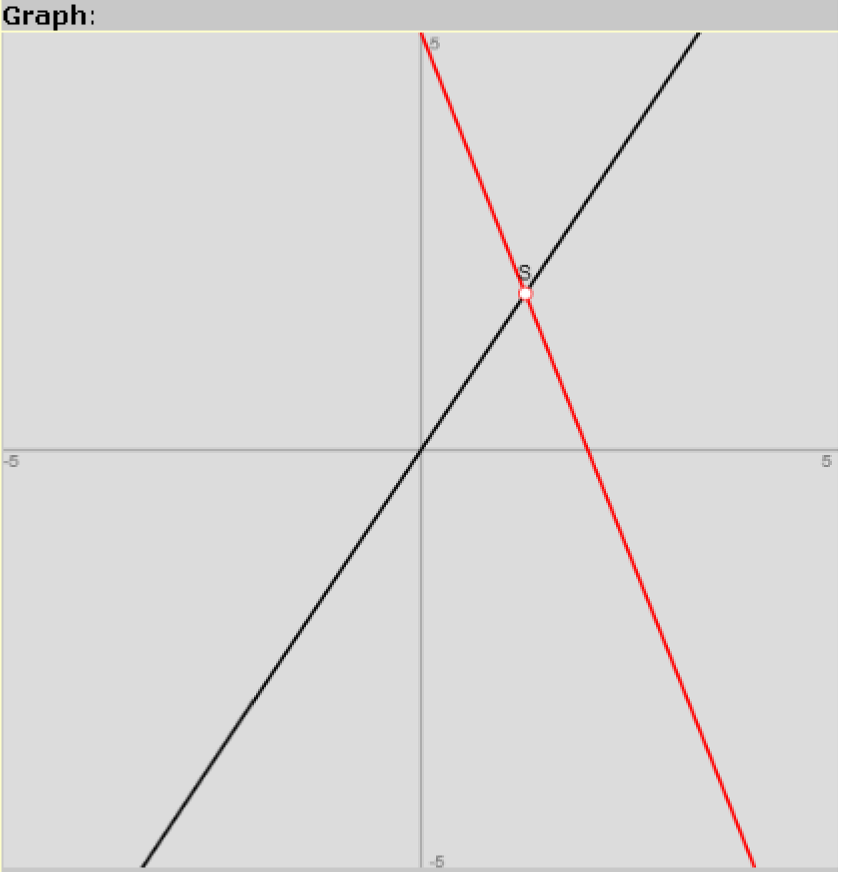
Der Schnittwinkel lautet also: φ = 55,49°.

IV. Wir führen noch Wertetabellen und Graphen der Geraden g: $y=\frac{3}{2}x$ und h: $y=5-\frac{5}{2}x$ an:

Wertetabelle:

x =	y = 1.5x	y = -2.5x + 5
-5	-7.5	17.5
-4.5	-6.75	16.25
-4	-6	15
-3.5	-5.25	13.75
-3	-4.5	12.5
-2.5	-3.75	11.25
-2	-3	10
-1.5	-2.25	8.75
-1	-1.5	7.5
-0.5	-0.75	6.25
0	0	5
0.5	0.75	3.75
1	1.5	2.5
1.5	2.25	1.25
2	3	0
2.5	3.75	-1.25
3	4.5	-2.5
3.5	5.25	-3.75
4	6	-5
4.5	6.75	-6.25
5	7.5	-7.5

Graph:



Gerade: g: y = 1.5x (schwarz)

Gerade: h: y = -2.5x + 5 (rot)

Der Schnittpunkt ist dann auch laut Zeichnung: S(1,25|1,875), der Schnittwinkel: φ = 55,49°.

2. Lösung: I. Allgemein gilt: a) Rechnerisch lässt sich der Schnittpunkt zweier Geraden in seiner x-Koordinate durch Gleichsetzen der Geradengleichungen g: $y = m_1x + b_1$ und h: $y = m_2x + b_2$ ermitteln, also:

$m_1x + b_1 = m_2x + b_2$ => $m_1x - m_2x = b_2 - b_1$ => $(m_1-m_2)x = b_2 - b_1$ => $x_S=\frac{b_2-b_1}{m_2-m_1}$.

Einsetzen in die Geradengleichung von g oder h ergibt die y-Koordinate des Schnittpunkts, also:

$$y_S=m_1x_S+b_1=m_1\frac{b_2-b_1}{m_2-m_1}+b_1=m_2x_S+b_2=m_2\frac{b_2-b_1}{m_2-m_1}+b_2.$$

Der Schnittpunkt lautet dann: $S(x_S|y_S)$.

b) Der Schnittwinkel φ zwischen zwei sich schneidenden Geraden g: $y = m_1x + b_1$ und h: $y = m_2x + b_2$ errechnet sich aus den (auch negativen) Steigungswinkeln der Geraden:

$\tan\varphi_1=m_1$ => $\varphi_1 = \tan^{-1}(m_1)$, $\tan\varphi_2=m_2$ => $\varphi_2 = \tan^{-1}(m_2)$ => $\varphi = |\varphi_2-\varphi_1|$.

II. Rechnerisch gehen wir wie folgt vor: Gleichsetzen der Geradengleichungen von g: $y = \frac{3}{2}x$ und h: $y = 5 - \frac{5}{2}x$ (y = y) führt auf die Gleichung und deren Umformungen:

$\frac{3}{2}x = 5 - \frac{5}{2}x$	(Umwandlung in Dezimalzahlen)
1,5x = 5 – 2,5x	| +2,5x
4x = 5	| :4
x = 1,25.	

Die x-Koordinate des Schnittpunktes ist damit: $x_S = 1{,}25$. Einsetzen von $x_S=1{,}25$ z.B. in die Gerade g: $y = \frac{3}{2}x$ ergibt:

$$y_S = \frac{3}{2} \cdot 1{,}25 = 1{,}5 \cdot 1{,}25 = 1{,}875,$$

so dass S(1,25|1,875) der <u>Schnittpunkt</u> der beiden Geraden g und h ist.

III. Mit den Geradengleichungen g: $y = \frac{3}{2}x$ und h: $y = 5 - \frac{5}{2}x$ und den Steigungen $m_1 = 1{,}5$ und $m_2 = -2{,}5$ folgt für den <u>Schnittwinkel</u> vermöge der Steigungswinkel der beiden Geraden:

$\tan\varphi_1 = 1{,}5$ => $\varphi_1 = \tan^{-1}(1{,}5) = 56{,}31°$,

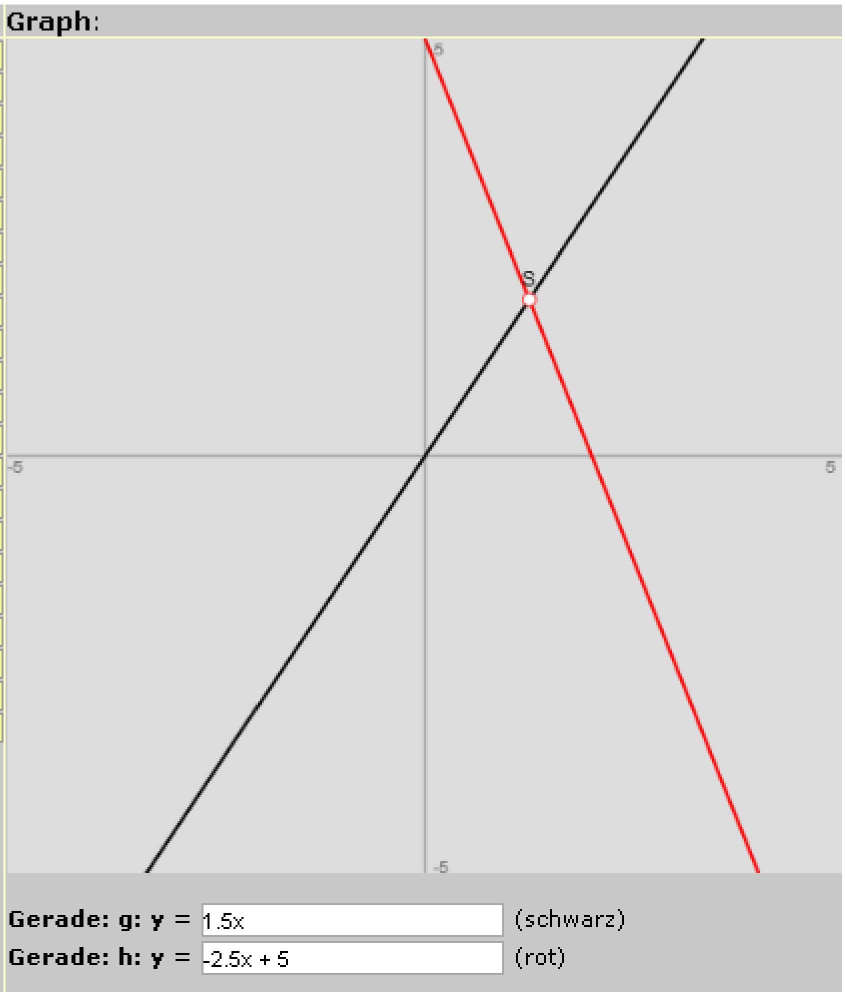
$\tan\varphi_2 = -2{,}5$ => $\varphi_2 = \tan^{-1}(-2{,}5) = -68{,}2°$,

woraus sich für den (vorläufigen) Schnittwinkel der stumpfe Winkel $\varphi = |-68{,}2° - 56{,}31°| = 124{,}51°$ ergibt. Soll der Schnittwinkel spitz sein, so ist in diesem Fall $\varphi = 180° - 124{,}51° = 55{,}49°$ zu bilden.

IV. Wir führen noch <u>Wertetabellen und Graphen</u> der Geraden g: $y = \frac{3}{2}x$ und h: $y = 5 - \frac{5}{2}x$ an:

Wertetabelle:

x =	y = 1.5x	y = -2.5x + 5
-5	-7.5	17.5
-4.5	-6.75	16.25
-4	-6	15
-3.5	-5.25	13.75
-3	-4.5	12.5
-2.5	-3.75	11.25
-2	-3	10
-1.5	-2.25	8.75
-1	-1.5	7.5
-0.5	-0.75	6.25
0	0	5
0.5	0.75	3.75
1	1.5	2.5
1.5	2.25	1.25
2	3	0
2.5	3.75	-1.25
3	4.5	-2.5
3.5	5.25	-3.75
4	6	-5
4.5	6.75	-6.25
5	7.5	-7.5



Der Schnittpunkt ist dann auch laut Zeichnung: S(1,25|1,875), der Schnittwinkel: $\varphi = 55{,}49°$.

www.michael-buhlmann.de / 10.2016 / Aufgabe 264