

# Mathematikaufgaben

## > Funktionen

## > Geraden

---

**Aufgabe:** Bestimme Schnittpunkt und Schnittwinkel der Geraden:

$$g: y = -\frac{3}{8}x - 2$$

$$h: y = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{2}$$

rechnerisch.

**1. Lösung:** I. Allgemein gilt: a) Rechnerisch lässt sich der Schnittpunkt zweier Geraden in seiner x-Koordinate durch Gleichsetzen der Geradengleichungen  $g: y = m_1x + b_1$  und  $h: y = m_2x + b_2$  ermitteln, also:

$$m_1x + b_1 = m_2x + b_2 \Rightarrow m_1x - m_2x = b_2 - b_1 \Rightarrow (m_1 - m_2)x = b_2 - b_1 \Rightarrow x_S = \frac{b_2 - b_1}{m_2 - m_1}.$$

Einsetzen in die Geradengleichung von g oder h ergibt die y-Koordinate des Schnittpunkts, also:

$$y_S = m_1x_S + b_1 = m_1 \frac{b_2 - b_1}{m_2 - m_1} + b_1 = m_2x_S + b_2 = m_2 \frac{b_2 - b_1}{m_2 - m_1} + b_2.$$

Der Schnittpunkt lautet dann:  $S(x_S|y_S)$ .

b) Der Schnittwinkel  $\varphi$  zwischen zwei sich schneidenden Geraden  $g: y = m_1x + b_1$  und  $h: y = m_2x + b_2$  errechnet sich vermöge der Formel:

$$\tan \varphi = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1m_2} \right|.$$

II. Rechnerisch gehen wir wie folgt vor: Gleichsetzen der Geradengleichungen von  $g: y = -\frac{3}{8}x - 2$

und  $h: y = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{2}$  ( $y = y$ ) führt auf die Gleichung und deren Umformungen:

$$-\frac{3}{8}x - 2 = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{2} \quad | \cdot 8 \text{ (Multiplikation mit dem Hauptnenner)}$$

$$-\frac{3}{8}x \cdot 8 - 2 \cdot 8 = -\frac{5}{4}x \cdot 8 + \frac{3}{2} \cdot 8 \quad \text{(Kürzen)}$$

$$\begin{array}{rcl}
 -3x - 16 = -10x + 12 & & | +10x \\
 7x - 16 = 12 & & | +16 \\
 7x = 28 & & | :7 \\
 x = 4. & & 
 \end{array}$$

Die x-Koordinate des Schnittpunktes ist damit:  $x_s = 4$ . Einsetzen von  $x_s = 4$  z.B. in die Gerade g:

$$y = -\frac{3}{8}x - 2 \text{ ergibt:}$$

$$y_s = -\frac{3}{8} \cdot 4 - 2 = -\frac{12}{8} - 2 = -1,5 - 2 = -3,5,$$

so dass  $S(4|-3,5)$  der Schnittpunkt der beiden Geraden g und h ist.

III. Mit den Geradengleichungen g:  $y = -\frac{3}{8}x - 2$  und h:  $y = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{2}$  und den Steigungen

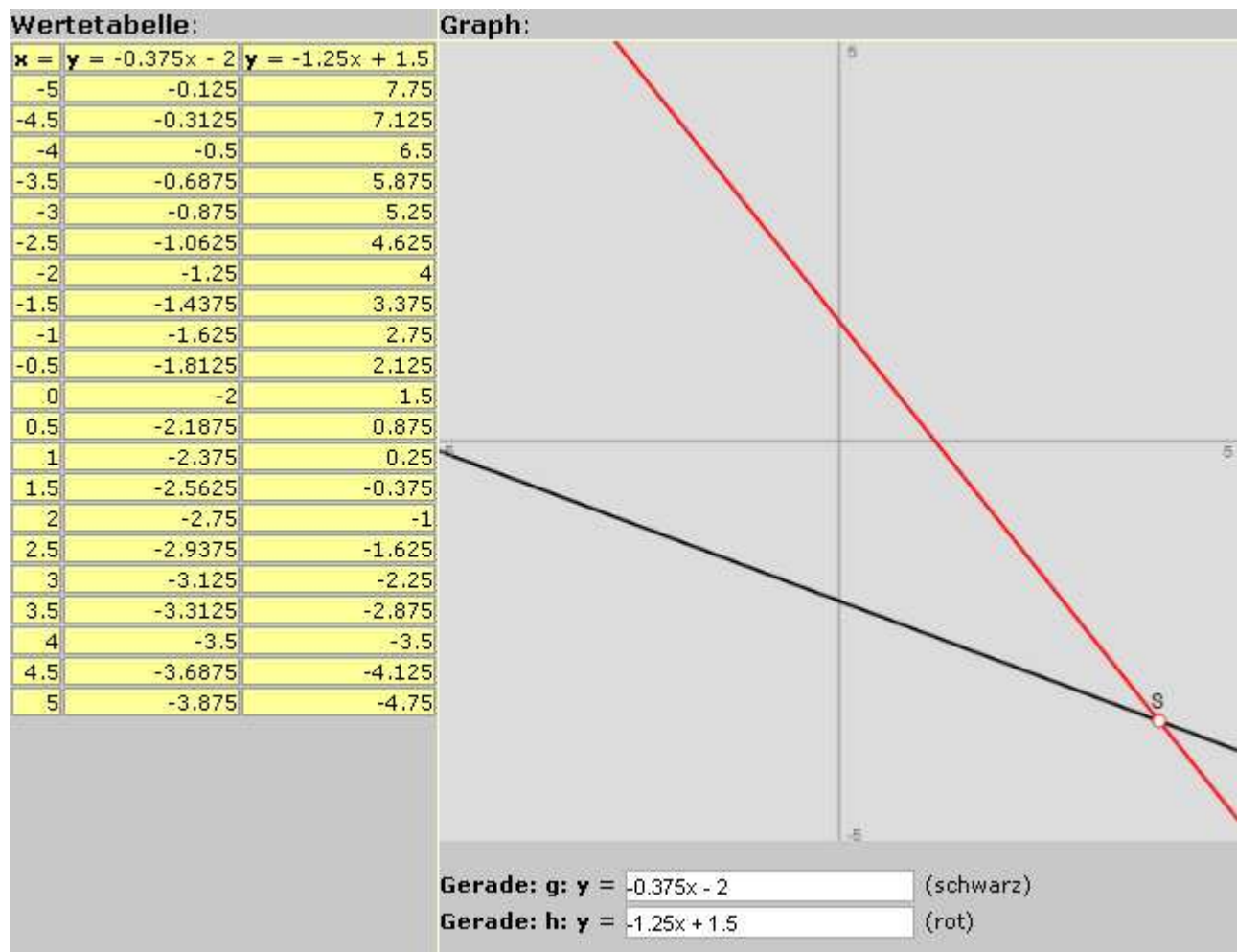
$m_1 = -0,375$  und  $m_2 = -1,25$  folgt für den Schnittwinkel:

$$\tan \varphi = \left| \frac{-1,25 - (-0,375)}{1 + (-0,375) \cdot (-1,25)} \right| = \left| \frac{-0,875}{1,46875} \right| = 0,5957 \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}(0,5957) = 30,78^\circ$$

Der Schnittwinkel lautet also:  $\varphi = 55,49^\circ$ .

IV. Wir führen noch Wertetabellen und Graphen der Geraden g:  $y = -\frac{3}{8}x - 2$  und h:  $y = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{2}$

an:



Der Schnittpunkt ist dann auch laut Zeichnung:  $S(4|-3,5)$ , der Schnittwinkel:  $\varphi = 30,78^\circ$ .

**2. Lösung:** I. Allgemein gilt: a) Rechnerisch lässt sich der Schnittpunkt zweier Geraden in seiner x-Koordinate durch Gleichsetzen der Geradengleichungen g:  $y = m_1x + b_1$  und h:  $y = m_2x + b_2$  ermitteln, also:

$$m_1x + b_1 = m_2x + b_2 \Rightarrow m_1x - m_2x = b_2 - b_1 \Rightarrow (m_1 - m_2)x = b_2 - b_1 \Rightarrow x_S = \frac{b_2 - b_1}{m_2 - m_1}.$$

Einsetzen in die Geradengleichung von g oder h ergibt die y-Koordinate des Schnittpunkts, also:

$$y_S = m_1x_S + b_1 = m_1 \frac{b_2 - b_1}{m_2 - m_1} + b_1 = m_2x_S + b_2 = m_2 \frac{b_2 - b_1}{m_2 - m_1} + b_2.$$

Der Schnittpunkt lautet dann:  $S(x_S|y_S)$ .

b) Der Schnittwinkel  $\varphi$  zwischen zwei sich schneidenden Geraden g:  $y = m_1x + b_1$  und h:  $y = m_2x + b_2$  errechnet sich aus den (auch negativen) Steigungswinkeln der Geraden:

$$\tan \varphi_1 = m_1 \Rightarrow \varphi_1 = \tan^{-1}(m_1), \quad \tan \varphi_2 = m_2 \Rightarrow \varphi_2 = \tan^{-1}(m_2) \Rightarrow \varphi = |\varphi_2 - \varphi_1|.$$

II. Rechnerisch gehen wir wie folgt vor: Gleichsetzen der Geradengleichungen von g:  $y = -\frac{3}{8}x - 2$

und h:  $y = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{2}$  ( $y = y$ ) führt auf die Gleichung und deren Umformungen:

$$-\frac{3}{8}x - 2 = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{2} \quad | \cdot 8 \text{ (Multiplikation mit dem Hauptnenner)}$$

$$-\frac{3}{8}x \cdot 8 - 2 \cdot 8 = -\frac{5}{4}x \cdot 8 + \frac{3}{2} \cdot 8 \quad \text{(Kürzen)}$$

$$-3x - 16 = -10x + 12 \quad | +10x$$

$$7x - 16 = 12 \quad | +16$$

$$7x = 28 \quad | :7$$

$$x = 4.$$

Die x-Koordinate des Schnittpunktes ist damit:  $x_S = 4$ . Einsetzen von  $x_S = 4$  z.B. in die Gerade g:

$$y = -\frac{3}{8}x - 2 \text{ ergibt:}$$

$$y_S = -\frac{3}{8} \cdot 4 - 2 = -\frac{12}{8} - 2 = -1,5 - 2 = -3,5,$$

so dass  $S(4|-3,5)$  der Schnittpunkt der beiden Geraden g und h ist.

III. Mit den Geradengleichungen g:  $y = -\frac{3}{8}x - 2$  und h:  $y = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{2}$  und den Steigungen

$m_1 = -0,375$  und  $m_2 = -1,25$  folgt für den Schnittwinkel vermöge der Steigungswinkel der beiden Geraden:

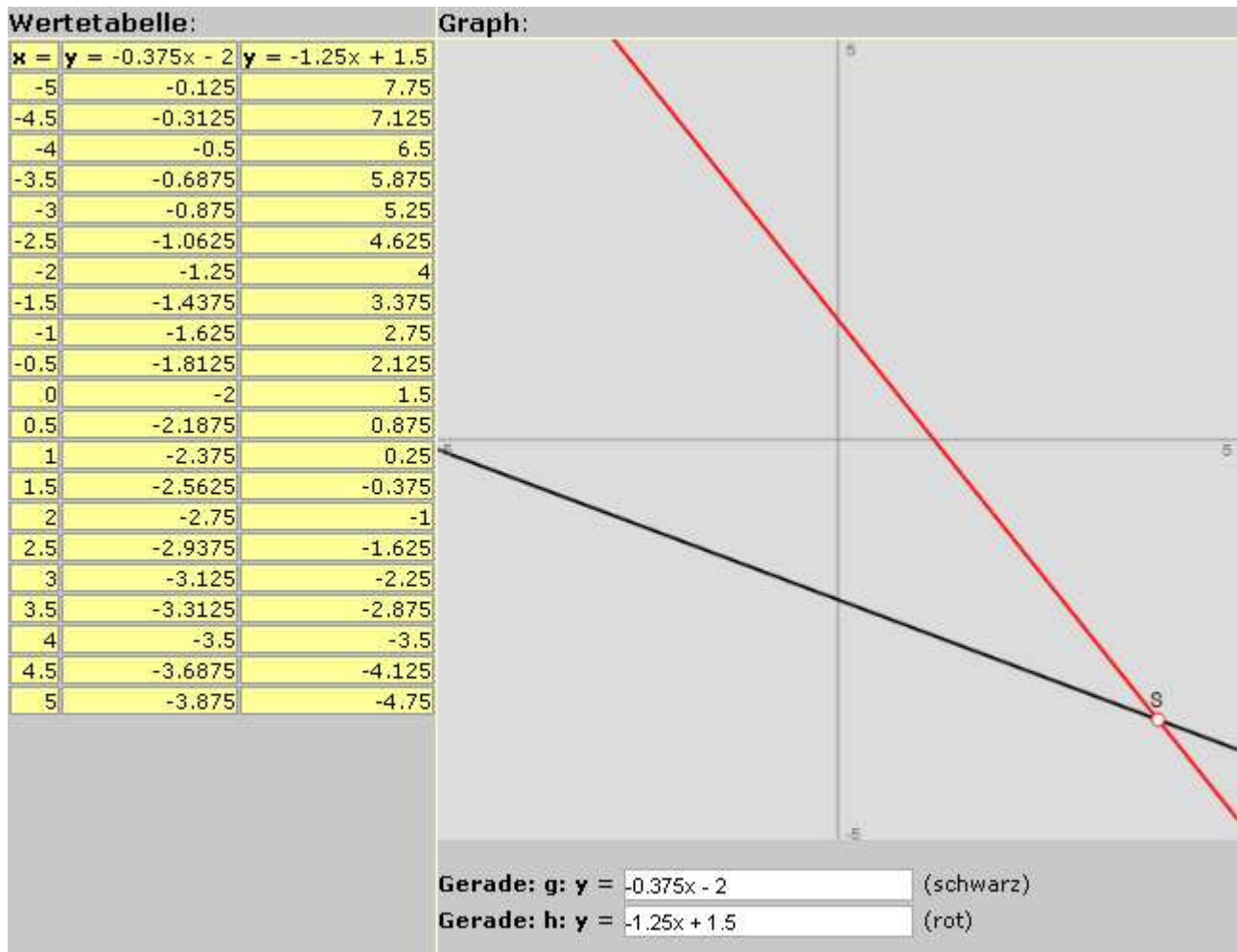
$$\tan \varphi_1 = -0,375 \Rightarrow \varphi_1 = \tan^{-1}(-0,375) = -20,56^\circ,$$

$$\tan \varphi_2 = -1,25 \Rightarrow \varphi_2 = \tan^{-1}(-1,25) = -51,34^\circ,$$

woraus sich für den Schnittwinkel  $\varphi = |-51,34^\circ - (-20,56^\circ)| = 30,78^\circ$  ergibt.

IV. Wir führen noch Wertetabellen und Graphen der Geraden g:  $y = -\frac{3}{8}x - 2$  und h:  $y = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{2}$

an:



Der Schnittpunkt ist dann auch laut Zeichnung:  $S(4|-3,5)$ , der Schnittwinkel:  $\varphi = 30,78^\circ$ .

www.michael-buhlmann.de / 10.2016 / Aufgabe 265