Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Funktionen
> Geraden

Aufgabe: Bestimme Schnittpunkt und Schnittwinkel der Geraden:

$$\text{g: } y = -\frac{3}{8}x - 2$$
$$\text{h: } y = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{2}$$

rechnerisch.

1. Lösung: I. Allgemein gilt: a) Rechnerisch lässt sich der Schnittpunkt zweier Geraden in seiner x-Koordinate durch Gleichsetzen der Geradengleichungen g: $y = m_1x + b_1$ und h: $y = m_2x + b_2$ ermitteln, also:

$m_1x + b_1 = m_2x + b_2$ => $m_1x - m_2x = b_2 - b_1$ => $(m_1-m_2)x = b_2 - b_1$ => $x_S = \frac{b_2 - b_1}{m_2 - m_1}$.

Einsetzen in die Geradengleichung von g oder h ergibt die y-Koordinate des Schnittpunkts, also:

$$y_S = m_1 x_S + b_1 = m_1 \frac{b_2 - b_1}{m_2 - m_1} + b_1 = m_2 x_S + b_2 = m_2 \frac{b_2 - b_1}{m_2 - m_1} + b_2 .$$

Der Schnittpunkt lautet dann: $S(x_S|y_S)$.

b) Der Schnittwinkel φ zwischen zwei sich schneidenden Geraden g: $y = m_1x + b_1$ und h: $y = m_2x + b_2$ errechnet sich vermöge der Formel:

$$\tan\varphi = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right| .$$

II. Rechnerisch gehen wir wie folgt vor: Gleichsetzen der Geradengleichungen von g: $y = -\frac{3}{8}x - 2$ und h: $y = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{2}$ (y = y) führt auf die Gleichung und deren Umformungen:

$-\frac{3}{8}x - 2 = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{2}$ | ·8 (Multiplikation mit dem Hauptnenner)

$-\frac{3}{8}x \cdot 8 - 2 \cdot 8 = -\frac{5}{4}x \cdot 8 + \frac{3}{2} \cdot 8$ (Kürzen)

$-3x-16=-10x+12$ | +10x
7x – 16 = 12 | +16
7x = 28 | :7
x = 4.

Die x-Koordinate des Schnittpunktes ist damit: x_S = 4. Einsetzen von x_S=1,25 z.B. in die Gerade g: $y=-\frac{3}{8}x-2$ ergibt:

$$y_S=-\frac{3}{8}\cdot 4-2=-\frac{12}{8}-2=-1{,}5-2=-3{,}5,$$

so dass S(4|-3,5) der Schnittpunkt der beiden Geraden g und h ist.

III. Mit den Geradengleichungen g: $y=-\frac{3}{8}x-2$ und h: $y=-\frac{5}{4}x+\frac{3}{2}$ und den Steigungen m_1 = -0,375 und m_2 = -1,25 folgt für den Schnittwinkel:

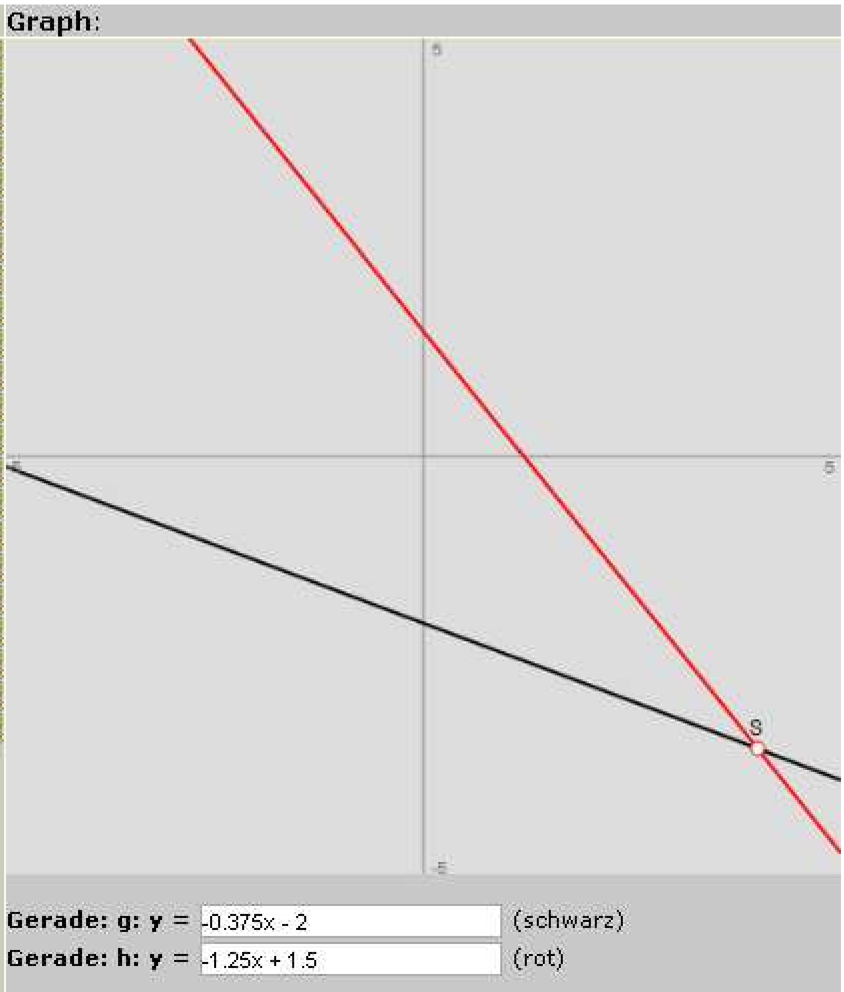
$$\tan\varphi=\left|\frac{-1{,}25-(-0{,}375)}{1+(-0{,}375)\cdot(-1{,}25)}\right|=\left|\frac{-0{,}875}{1{,}46875}\right|=0{,}5957$$ => φ = $\tan^{-1}$(0,5957) = 30,78°.

Der Schnittwinkel lautet also: φ = 55,49°.

IV. Wir führen noch Wertetabellen und Graphen der Geraden g: $y=-\frac{3}{8}x-2$ und h: $y=-\frac{5}{4}x+\frac{3}{2}$ an:

Wertetabelle:

x =	y = -0.375x - 2	y = -1.25x + 1.5
-5	-0.125	7.75
-4.5	-0.3125	7.125
-4	-0.5	6.5
-3.5	-0.6875	5.875
-3	-0.875	5.25
-2.5	-1.0625	4.625
-2	-1.25	4
-1.5	-1.4375	3.375
-1	-1.625	2.75
-0.5	-1.8125	2.125
0	-2	1.5
0.5	-2.1875	0.875
1	-2.375	0.25
1.5	-2.5625	-0.375
2	-2.75	-1
2.5	-2.9375	-1.625
3	-3.125	-2.25
3.5	-3.3125	-2.875
4	-3.5	-3.5
4.5	-3.6875	-4.125
5	-3.875	-4.75



Der Schnittpunkt ist dann auch laut Zeichnung: S(4|-3,5), der Schnittwinkel: φ = 30,78°.

2. Lösung: I. Allgemein gilt: a) Rechnerisch lässt sich der Schnittpunkt zweier Geraden in seiner x-Koordinate durch Gleichsetzen der Geradengleichungen g: $y = m_1x + b_1$ und h: $y = m_2x + b_2$ ermitteln, also:

$m_1x + b_1 = m_2x + b_2$ => $m_1x – m_2x = b_2 – b_1$ => $(m_1–m_2)x = b_2 – b_1$ => $x_S = \frac{b_2 - b_1}{m_2 - m_1}$.

Einsetzen in die Geradengleichung von g oder h ergibt die y-Koordinate des Schnittpunkts, also:

$$y_S = m_1 x_S + b_1 = m_1 \frac{b_2 - b_1}{m_2 - m_1} + b_1 = m_2 x_S + b_2 = m_2 \frac{b_2 - b_1}{m_2 - m_1} + b_2 .$$

Der Schnittpunkt lautet dann: $S(x_S|y_S)$.

b) Der Schnittwinkel φ zwischen zwei sich schneidenden Geraden g: $y = m_1x + b_1$ und h: $y = m_2x + b_2$ errechnet sich aus den (auch negativen) Steigungswinkeln der Geraden:

$\tan\varphi_1 = m_1$ => $\varphi_1 = \tan^{-1}(m_1)$, $\tan\varphi_2 = m_2$ => $\varphi_2 = \tan^{-1}(m_2)$ => $\varphi = |\varphi_2–\varphi_1|$.

II. Rechnerisch gehen wir wie folgt vor: Gleichsetzen der Geradengleichungen von g: $y = -\frac{3}{8}x - 2$ und h: $y = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{2}$ (y = y) führt auf die Gleichung und deren Umformungen:

$-\frac{3}{8}x - 2 = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{2}$	| ·8 (Multiplikation mit dem Hauptnenner)
$-\frac{3}{8}x \cdot 8 - 2 \cdot 8 = -\frac{5}{4}x \cdot 8 + \frac{3}{2} \cdot 8$	(Kürzen)
$-3x - 16 = -10x + 12$	| +10x
7x – 16 = 12	| +16
7x = 28	| :7
x = 4.	

Die x-Koordinate des Schnittpunktes ist damit: $x_S = 4$. Einsetzen von $x_S=1,25$ z.B. in die Gerade g: $y = -\frac{3}{8}x - 2$ ergibt:

$$y_S = -\frac{3}{8} \cdot 4 - 2 = -\frac{12}{8} - 2 = -1{,}5 - 2 = -3{,}5 ,$$

so dass S(4|-3,5) der Schnittpunkt der beiden Geraden g und h ist.

III. Mit den Geradengleichungen g: $y = -\frac{3}{8}x - 2$ und h: $y = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{2}$ und den Steigungen $m_1 = -0{,}375$ und $m_2 = -1{,}25$ folgt für den Schnittwinkel vermöge der Steigungswinkel der beiden Geraden:

$\tan\varphi_1 = -0{,}375$ => $\varphi_1 = \tan^{-1}(-0{,}375) = -20{,}56°$,

$\tan\varphi_2 = -1{,}25$ => $\varphi_2 = \tan^{-1}(-1{,}25) = -51{,}34°$,

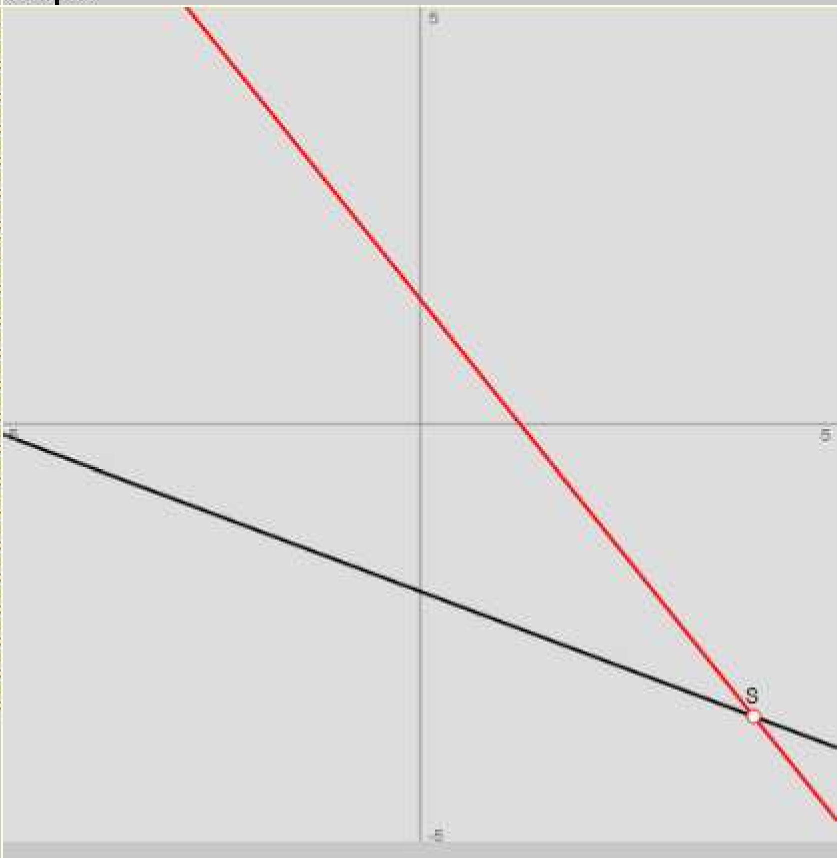
woraus sich für den Schnittwinkel $\varphi = |-51{,}34°–(-20{,}56)°| = 30{,}78°$ ergibt.

IV. Wir führen noch Wertetabellen und Graphen der Geraden g: $y = -\frac{3}{8}x - 2$ und h: $y = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{2}$ an:

Wertetabelle:

x =	y = -0.375x - 2	y = -1.25x + 1.5
-5	-0.125	7.75
-4.5	-0.3125	7.125
-4	-0.5	6.5
-3.5	-0.6875	5.875
-3	-0.875	5.25
-2.5	-1.0625	4.625
-2	-1.25	4
-1.5	-1.4375	3.375
-1	-1.625	2.75
-0.5	-1.8125	2.125
0	-2	1.5
0.5	-2.1875	0.875
1	-2.375	0.25
1.5	-2.5625	-0.375
2	-2.75	-1
2.5	-2.9375	-1.625
3	-3.125	-2.25
3.5	-3.3125	-2.875
4	-3.5	-3.5
4.5	-3.6875	-4.125
5	-3.875	-4.75

Graph:



Gerade: g: y = -0.375x - 2 (schwarz)

Gerade: h: y = -1.25x + 1.5 (rot)

Der Schnittpunkt ist dann auch laut Zeichnung: S(4|-3,5), der Schnittwinkel: φ = 30,78°.