

Mathematikaufgaben

> Funktionen

> Geraden

Aufgabe: Bestimme die Gerade h, die senkrecht zur Geraden

$$g: y = \frac{2}{3}x + 2$$

steht und durch den Punkt P(-2|5) verläuft. Wo schneiden sich die beiden, senkrecht zueinander stehenden Geraden?

Lösung: I. Allgemein gilt: a) Rechnerisch lässt sich eine zu einer vorgegebenen Geraden g: $y = mx + b$ senkrechte Gerade h: $y = m_2x + b_2$ durch einen Punkt P($p_1|p_2$) ermitteln, indem auf Grund der Orthogonalität (Rechtwinkligkeit) zunächst:

$$m_2 = -1/m$$

gilt. Einsetzen des Punktes P($p_1|p_2$) in die Geradengleichung von h: $y = -x/m + b_2$ ergibt durch Punktprobe ($x=p_1, y=p_2$) und Auflösen der Gleichung nach p_2 :

$$p_2 = -p_1/m + b_2 \Rightarrow b_2 = p_2 + p_1/m,$$

so dass Steigung m_2 und y-Achsenabschnitt b_2 der zu berechnenden Gerade h bestimmt sind.

b) Schnittpunktberechnung: Rechnerisch lässt sich der Schnittpunkt in seiner x-Koordinate durch Gleichsetzen der Geradengleichungen g: $y = mx + b$ und h: $y = m_2x + b_2$ bestimmen, also:

$$mx + b = m_2x + b_2 \Rightarrow mx - m_2x = b_2 - b \Rightarrow (m - m_2)x = b_2 - b \Rightarrow x_s = \frac{b_2 - b}{m_2 - m}.$$

Einsetzen in die Geradengleichung von g oder h ergibt die y-Koordinate des Schnittpunkts, also:

$$y_s = mx_s + b = m_1 \frac{b_2 - b}{m_2 - m} + b = m_2 x_s + b_2 = m_2 \frac{b_2 - b}{m_2 - m} + b_2.$$

Der Schnittpunkt lautet dann: S($x_s|y_s$).

II. Zur Geradengleichung g: $y = \frac{2}{3}x + 2$ errechnet sich die noch unbekannte senkrechte Gerade

h: $y = m_2x + b_2$ mit:

$$m_2 = -\frac{1}{\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2} = -1,5 \text{ (Steigung)}$$

und auf Grund der Punktprobe mit dem Punkt P(-2|5), eingesetzt in h: $y = -1,5x + b_2$:

$$5 = -1,5 \cdot (-2) + b_2 \Rightarrow 5 = 3 + b_2 \Rightarrow b_2 = 2 \text{ (y-Achsenabschnitt)}$$

als: h: $y = -1,5x + 2$.

III. Schnittpunktberechnung: Gleichsetzen der Geradengleichungen ergibt:

$$\begin{array}{l} \frac{2}{3}x + 2 = -1,5x + 2 \quad | \cdot 3 \text{ (Multiplikation mit dem Hauptnenner)} \\ 2x + 6 = -4,5x + 6 \quad | +4,5x \\ 6,5x + 6 = 6 \quad | -6 \\ 6,5x = 0 \quad | :6,5 \end{array}$$

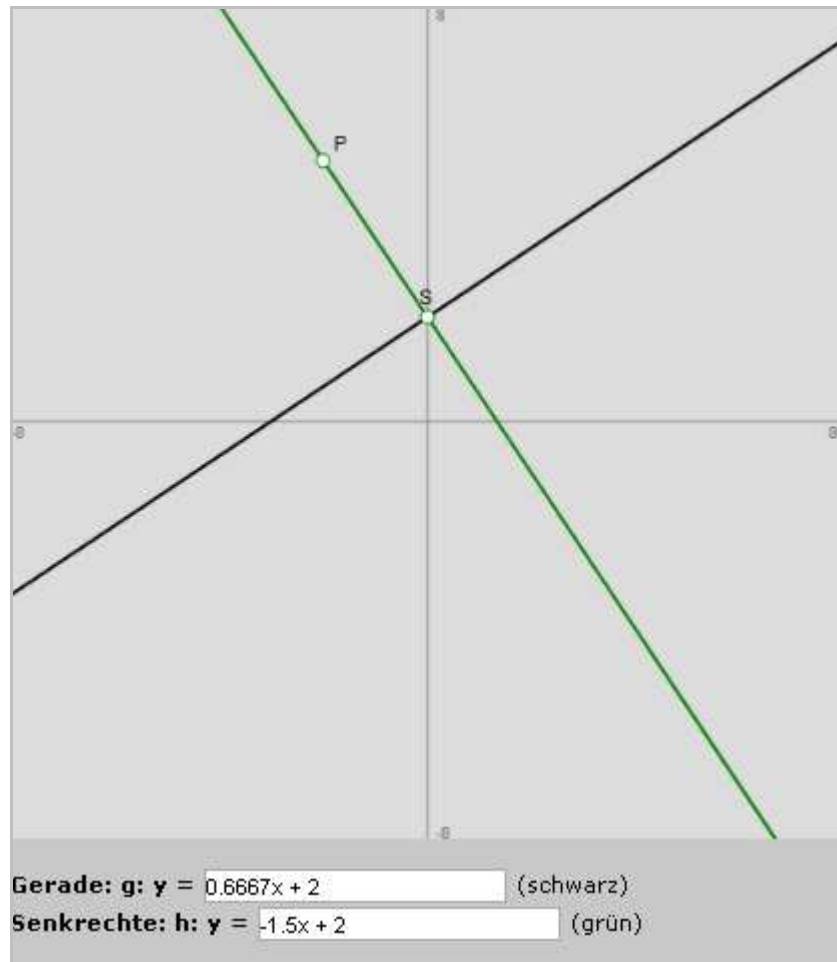
$$x = 0.$$

Die x-Koordinate des Schnittpunktes ist damit: $x_S = 0$. Einsetzen von $x_S=0$ z.B. in die Gerade

$$g: y = \frac{2}{3}x + 2 \text{ ergibt:}$$

$$y_S = \frac{2}{3} \cdot 0 + 2 = 2,$$

so dass $S(0|2)$ der Schnittpunkt der beiden Geraden g und h ist.



www.michael-buhlmann.de / 10.2016 / Aufgabe 270