Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Funktionen
> Geraden

Aufgabe: Zeichne die in der allgemeinen Form vorgegebene Gerade

g: 4x + 2y +6 = 0

in ein passendes x-y-Koordinatensystem. Zusammen mit dem Koordinatenursprung bilden die Schnittpunkte der Geraden mit den Achsen des Koordinatensystems ein Dreieck. Wie groß sind Flächeninhalt und Umfang des Dreiecks?

Lösung: I. a) Eine lineare Gleichung g: Ax + By + C = 0 (*) heißt allgemeine Form einer Geraden in einem x-y-Koordinatensystem. Bei reellem B ≠ 0 lässt sich die Gleichung (*) umstellen zur Haupt- oder Normalform der Geraden: $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$ mit Steigung $m=-\frac{A}{B}$ und y-Achsen-abschnitt $b=-\frac{C}{B}$.

b) Die Funktionsvorschrift einer Geraden als linearer Funktion ist ein (Funktions-) Term von der (Haupt-) Form y = mx + b mit der unabhängigen Variablen x und der abhängigen Variablen y (Geradengleichung). Die reelle Zahl m bezeichnet die Steigung, die Zahl b den y-Achsenabschnitt der Geraden. Da durch zwei Punkte im kartesischen Koordinatensystem genau eine Gerade geht, kann mit Hilfe der Punkte P(0|b) (y-Achsenabschnittspunkt) und Q(1|m+b) (Steigungsdreieck der Geraden) die Gerade gezeichnet werden.

c) Die Schnittpunkte einer Geraden y = mx + b mit den Achsen errechnen sich wie folgt:

y-Achse: x = 0 => y = b => Q(0|b) (als y- Achsenabschnittspunkt)
x-Achse: y = 0 => x = -b/m => N(-b/m|0) (als Nullstelle).

d) Für ein rechtwinkliges Dreieck mit Grundseite g und darauf rechtwinklig stehender Höhe h gilt als Formel für den Flächeninhalt A:

$$A=\frac{gh}{2},$$

für den Umfang u auf Grund des Satzes des Pythagoras (Hypotenusenlänge zum Quadrat gleich Summe der Kathetenlängen zum Quadrat):

$$u=g+h+\sqrt{g^2+h^2}.$$

II. Wir formen von der allgemeinen in die Hauptform der Geraden g um:

$$\frac{3}{8}x+\frac{1}{2}y-8=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}y=-\frac{3}{8}x+8 \Leftrightarrow y=-\frac{3}{4}x+16$$

und können die Gerade g: $y=-\frac{3}{4}x+16$ als lineare Funktion mit Steigung $m=-\frac{3}{4}$ und y-Achsenabschnitt b = 16 jetzt gut zeichnerisch erfassen und beschreiben.

III. Schnittpunkte mit den Achsen des Koordinatensystems berechnen wir über die Hauptform der Geraden g: $y=-\frac{3}{4}x+16$. Den Schnittpunkt mit der y-Achse, d.h. den y-Achsenabschnittspunkt, erhalten wir, wenn wir x = 0 in den Funktionsterm einsetzen, also:

x = 0 => $y=-\frac{3}{4}\cdot 0+16=16$ => Q(0|16).

Der Schnittpunkt mit der x-Achse, d.h. die Nullstelle der Gerade, errechnet sich aus dem Nullsetzen der Geradengleichung, also:

y = 0 => $-\frac{3}{4}x+16=0$ => -3x + 64 = 0 => 64 = 3x => x = 64/3 => N(64/3|0).

IV. Für das rechtwinklige Dreieck ΔONQ errechnet sich wegen der Grundseite g = 64/3 LE (Längeneinheiten) und der Höhe h = 16 LE der Flächeninhalt als:

$A=\frac{\frac{64}{3}\cdot 16}{2}=512$ FE (Flächeneinheiten).

Die Hypotenuse des Dreiecks ΔONQ ist $\sqrt{g^2+h^2}=\sqrt{(64/3)^2+16^2}=\sqrt{711\frac{1}{9}}=26\frac{2}{3}$ LE lang, der Umfang des Dreiecks beträgt somit:

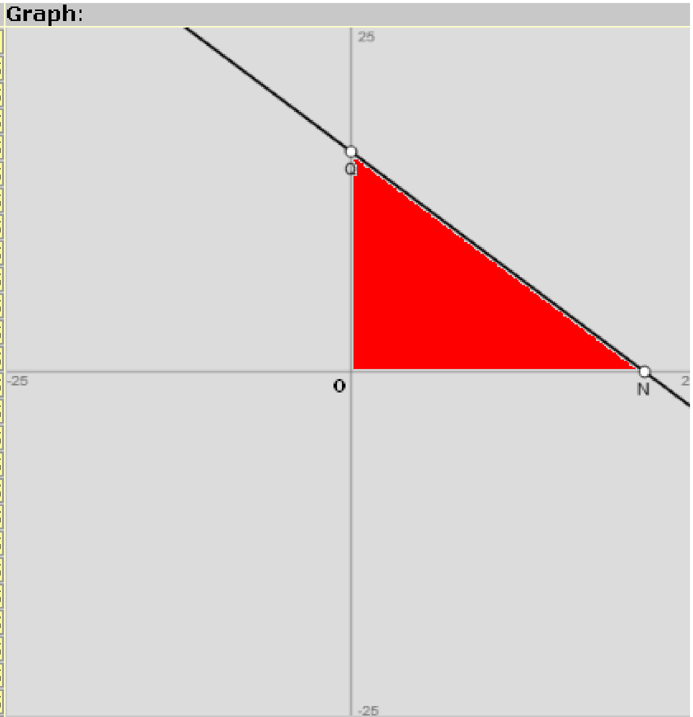
$u=\frac{64}{3}+16+26\frac{2}{3}=64$ LE.

V. Wir führen Wertetabelle und Graph der Geraden g: $\frac{3}{8}x+\frac{1}{2}y-8=0$ bzw. g: $y=-\frac{3}{4}x+16$ mit den Achsenschnittpunkten Q(0|16) und N(64/3|0) sowie dem Koordinatenursprung O(0|0) an:

Wertetabelle:

x =	y = -0.75x + 16
-25	34.75
-23	33.25
-21	31.75
-19	30.25
-17	28.75
-15	27.25
-13	25.75
-11	24.25
-9	22.75
-7	21.25
-5	19.75
-3	18.25
-1	16.75
1	15.25
3	13.75
5	12.25
7	10.75
9	9.25
11	7.75
13	6.25
15	4.75
17	3.25
19	1.75
21	0.25
23	-1.25
25	-2.75

Graph:



Gerade: g: y = -0.75x + 16

www.michael-buhlmann.de / 11.2016 / Aufgabe 278