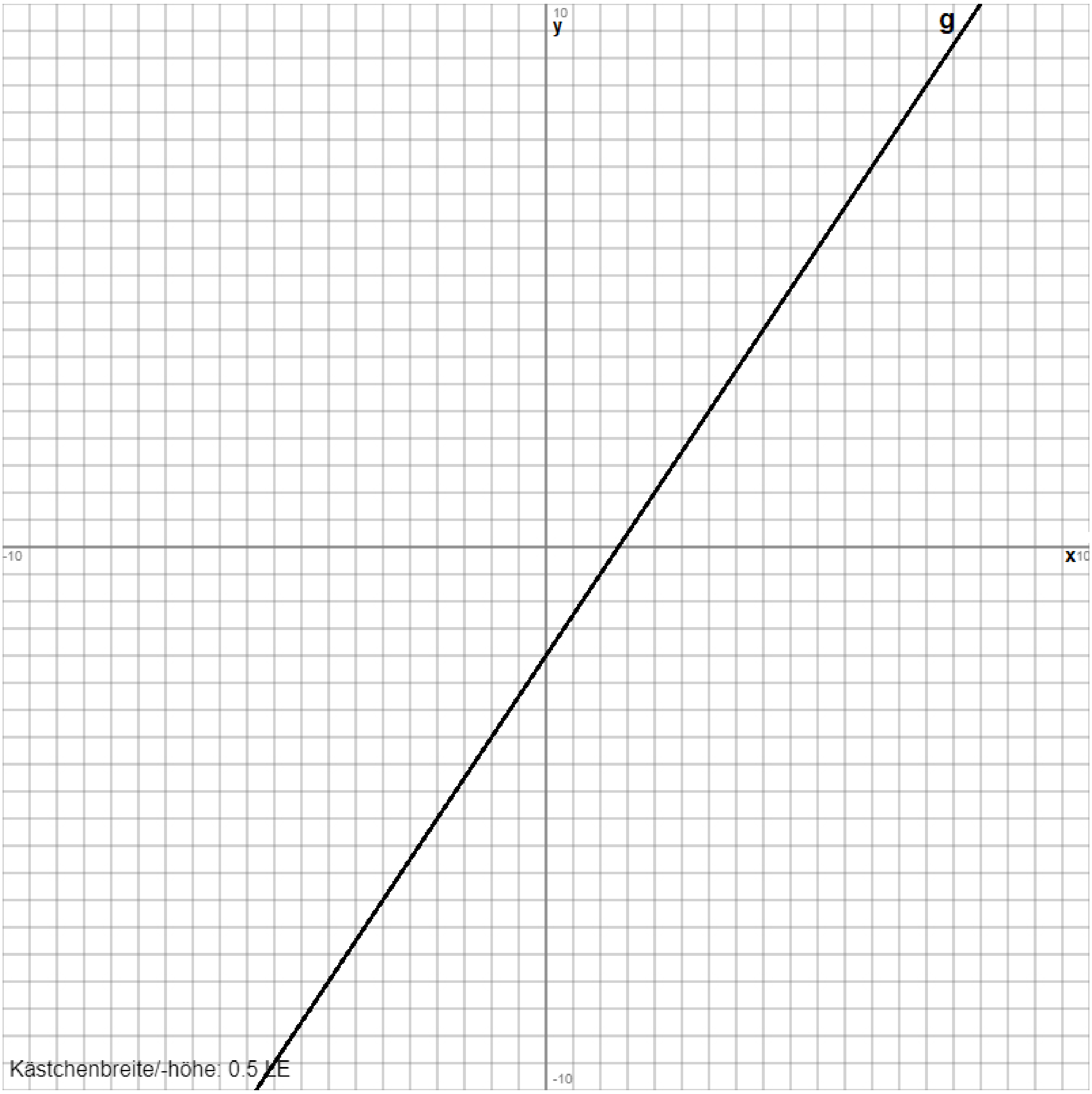
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Funktionen
> Geraden

Aufgabe: Gegeben seien die Gerade g, die Gerade h: 2y – x = 8 und die Gerade k durch die Punkte P(1|7) und Q(9|-1).

a) Lies die Gleichung der Geraden g aus der nachstehenden Darstellung des Graphen ab.



b) Berechne die Funktionsgleichung der Geraden k.

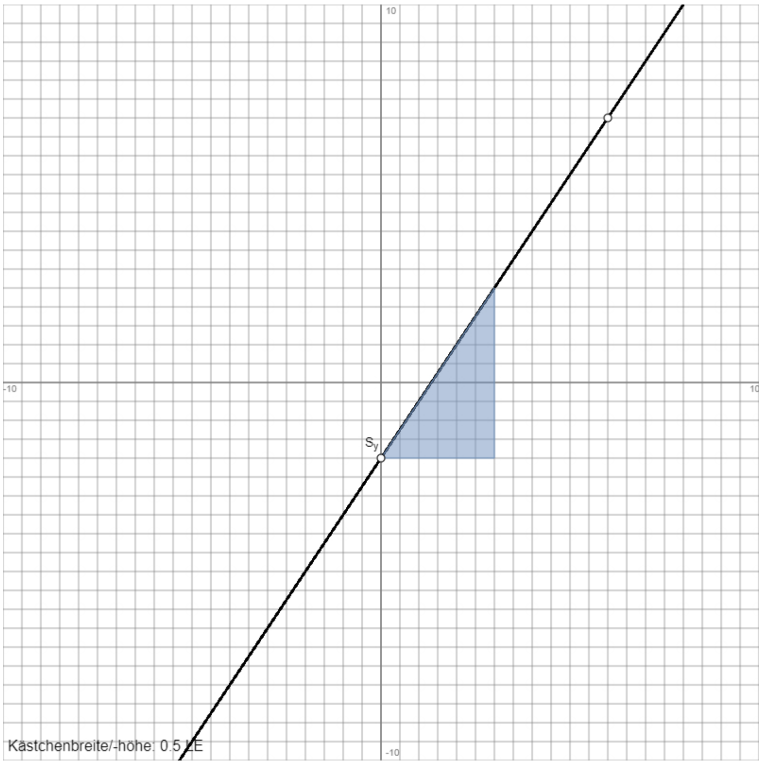
c) Zeichne die Geraden h und k in das oben stehende x-y-Koordinatensystem ein.

d) Die Geraden g und h schneiden sich im Punkt A(-2|-5). Berechne den Schnittpunkt B der Geraden h und k und den Schnittpunkt C der Geraden g und k.

e) Die Punkte A, B, C bilden das Dreieck ΔABC. Berechne den Innenwinkel α des Dreiecks an der Ecke A.

f) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC.

Lösung: a) Die Funktionsvorschrift einer allgemeinen Geraden ist ein (Funktions-) Term von der Form g: y = mx + c mit der unabhängigen Variablen x und der abhängigen Variablen y (Geradengleichung). Die Größe m heißt Steigung, die Größe c y-Achsenabschnitt der Geraden. Aus der Darstellung des Graphen bestimmt sich als y-Achsenabschnitt mit dem Schnittpunkt von Gerade und y-Achse: c = -2. Die Steigung bestimmt sich mit dem Steigungsdreieck vom y-Achsenabschnittspunkt $S_y(0|-2)$ zwei Einheiten nach rechts und drei Einheiten nach oben gehend als:
m = 3/2 = 1,5. Die Geradengleichung lautet somit: g: y = 1,5x – 2.



b) I. Zu bestimmen ist die Gerade k: y = mx + c. Sind hinsichtlich einer Geradenbestimmung zwei Punkte $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$ gegeben, so ermittelt sich die Gerade gemäß der Zweipunkteform

durch Errechnen der Geradensteigung $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (mit Hilfe der Koordinaten der Punkte P, Q),

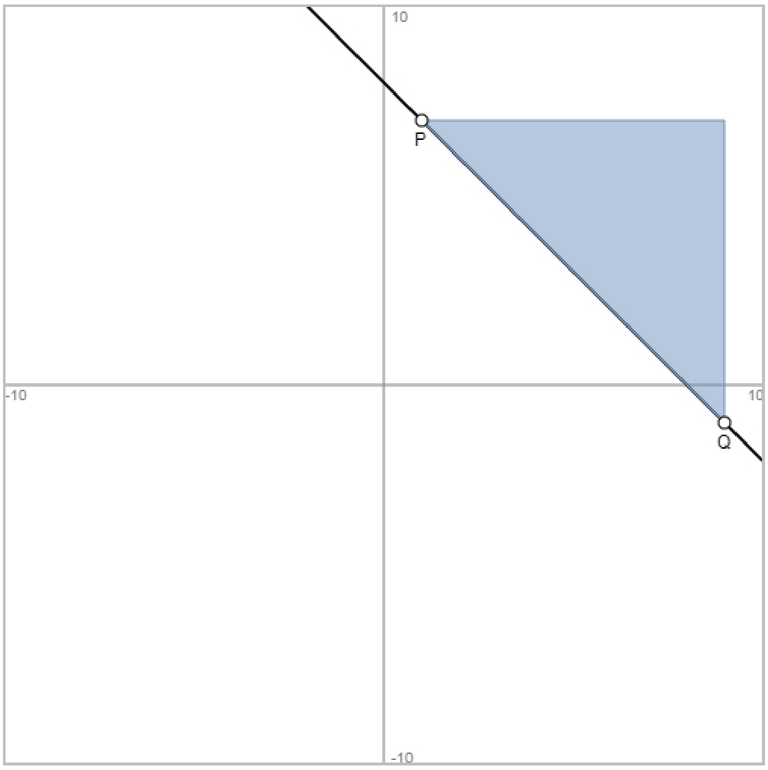
durch Einsetzen von m in die Geradengleichung y = mx + c und durch anschließende Punktprobe mit dem Punkt $P(x_1|y_1)$ (oder Q); Umstellen der Gleichung $y_1 = mx_1 + c$ (oder $y_2 = mx_2 + c$) ergibt den Wert des y-Achsenabschnitts $c = y_1 – mx_1$ (oder $c = y_2 – mx_2$).

II. Gesucht ist hier die Geradengleichung der Geraden k durch die Punkte P(1|7), Q(9|-1). Es ergibt sich die Berechnung:

k: y = mx + c (Ansatz)
Punkt P(1|7) -> $x_1 = 1$, $y_1 = 7$; Punkt Q(9|-1) -> $x_2 = 9$, $y_2 = -1$ -> Einsetzen (Steigungsformel) ->
Steigung $m = (y_2-y_1)/(x_2-x_1) = (-1-7)/(9-1) = -1$ -> Einsetzen (Steigung) ->
y = -1x + c

Punkt P(1|7) -> x = 1, y = 7 -> Einsetzen (Punktprobe) ->
$7 = -1 \cdot 1 + c$ (Ausrechnen)
$7 = -1 + c \quad | +1$
$8 = c$

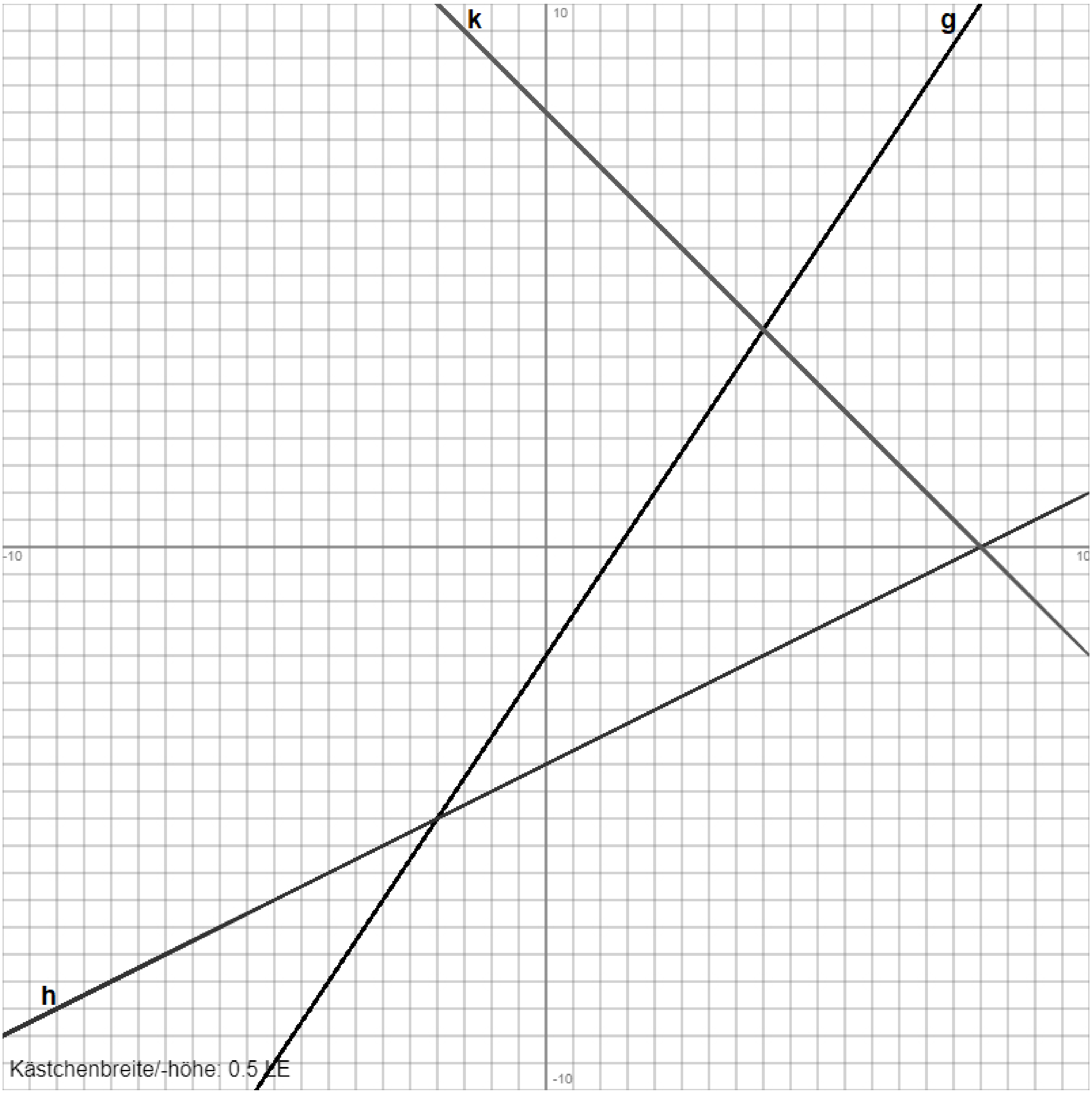
und damit die Geradengleichung: m = -1, c = 8 -> k: y = -x + 8.



c) I. Die Gerade h: 2y – x = 8 ist in der allgemeinen Form einer Geradengleichung gegeben. Wir stellen diese nach y wie folgt um:

$2y - x = 8 \quad | +x$
$2y = x + 8 \quad | :2$
$y = 0,5x + 4$

II. Die Geraden h: y = 0,5x – 4 und k: y = -x + 8 lassen sich nun in das vorgegebene x-y-Koordinatensystem zur Geraden g: y = 1,5x – 2 einzeichnen.
Zur Darstellung des Graphen einer Geraden y = mx + c in einem rechtwinkligen x-y-Koordinatensystem ist auf die Zahlen m und c zu verweisen. Die Zahl c gibt den Schnittpunkt des Graphen mit der y-Achse an, so dass im x-y-Koordinatensystem im Ursprung (c = 0), auf dem positiven Teil der y-Achse (c > 0) oder auf dem negativen Teil der y-Achse (c < 0) der y-Achsenabschnittspunkt $S_y(0|c)$ einzutragen ist.
Wir verwenden nun noch die Steigung m, die im Fall einer rationalen Zahl m, als Bruch m = p/q (mit p als ganzer, q als natürlicher Zahl) dargestellt werden kann. Der Bruch steht für das sog. Steigungsdreieck der Geraden, d.h. für ein rechtwinkliges Dreieck, das q Längeneinheiten in x-Richtung und p Längeneinheiten in y-Richtung groß ist. Die linke Ecke dieses Dreiecks sei der y-Achsenabschnittspunkt $S_y(0|c)$. Geht man im x-y-Koordinatensystem vom Punkt $S_y(0|c)$ in horizontaler Richtung q Längeneinheiten nach rechts und in vertikaler Richtung p Längeneinheiten nach oben (m > 0) bzw. nach unten (m < 0), so erhält man den zweiten, oberen bzw. unteren Punkt im Steigungsdreieck, der auch auf dem Graphen der Geraden liegt. Der Graph der Geraden ist die über die beiden Punkte hinausgehende Verbindung zwischen den Punkten.
Angemerkt sei noch, dass wenn die Steigung m eine ganze Zahl ist, diese als Bruch m/1 dargestellt werden kann (mit 1 Längeneinheit in x-Richtung und m Längeneinheiten in y-Richtung nach oben bzw. unten im Steigungsdreieck).
Die Graphen der beiden Geraden h: y = 0,5x – 4 und k: y = -x + 8 erhalten wir also über die y-Achsenabschnitte c = -4 bzw. c = 8 und über die Steigungen m = 0,5 bzw. m = -1 gemäß der eben beschriebenen Art und Weise. Wir erhalten:



d) I. Rechnerisch lässt sich der Schnittpunkt zweier Geraden in seiner x-Koordinate durch Gleichsetzen der Geradengleichungen $y = m_1x + c_1$ und $y = m_2x + c_2$ ermitteln, also:

$m_1x + c_1 = m_2x + c_2 \Rightarrow m_1x - m_2x = c_2 - c_1 \Rightarrow (m_1 - m_2)x = c_2 - c_1 \Rightarrow x_S = \frac{c_2 - c_1}{m_2 - m_1}$.

Einsetzen in die Gleichung einer der zwei Geraden ergibt die y-Koordinate des Schnittpunkts, also:

$$y_S = m_1x_S + c_1 = m_1\frac{c_2 - c_1}{m_2 - m_1} + c_1 = m_2x_S + c_2 = m_2\frac{c_2 - c_1}{m_2 - m_1} + c_2 .$$

Der Schnittpunkt lautet dann: $S(x_S|y_S)$.

II. Der Schnittpunkt A(-2|-5) zwischen den Geraden g und h ist schon bestimmt. Wir errechnen den Schnittpunkt B der Geraden h: $y = 0{,}5x - 4$ und k: $y = -x + 8$ und erhalten durch Gleichsetzen:

$y = y$	
$0{,}5x - 4 = -x + 8$	$\mid +x$
$1{,}5x - 4 = 8$	$\mid +4$
$1{,}5x = 12$	$\mid :1{,}5$
$x = 8$	

und damit die x-Koordinate des Schnittpunktes B. Einsetzen von x = 8 z.B. in die Geradengleichung von k: y = -x + 8 ergibt die y-Koordinate:

y = -8 + 8 = 0,

so dass der Schnittpunkt lautet: B(8|0).

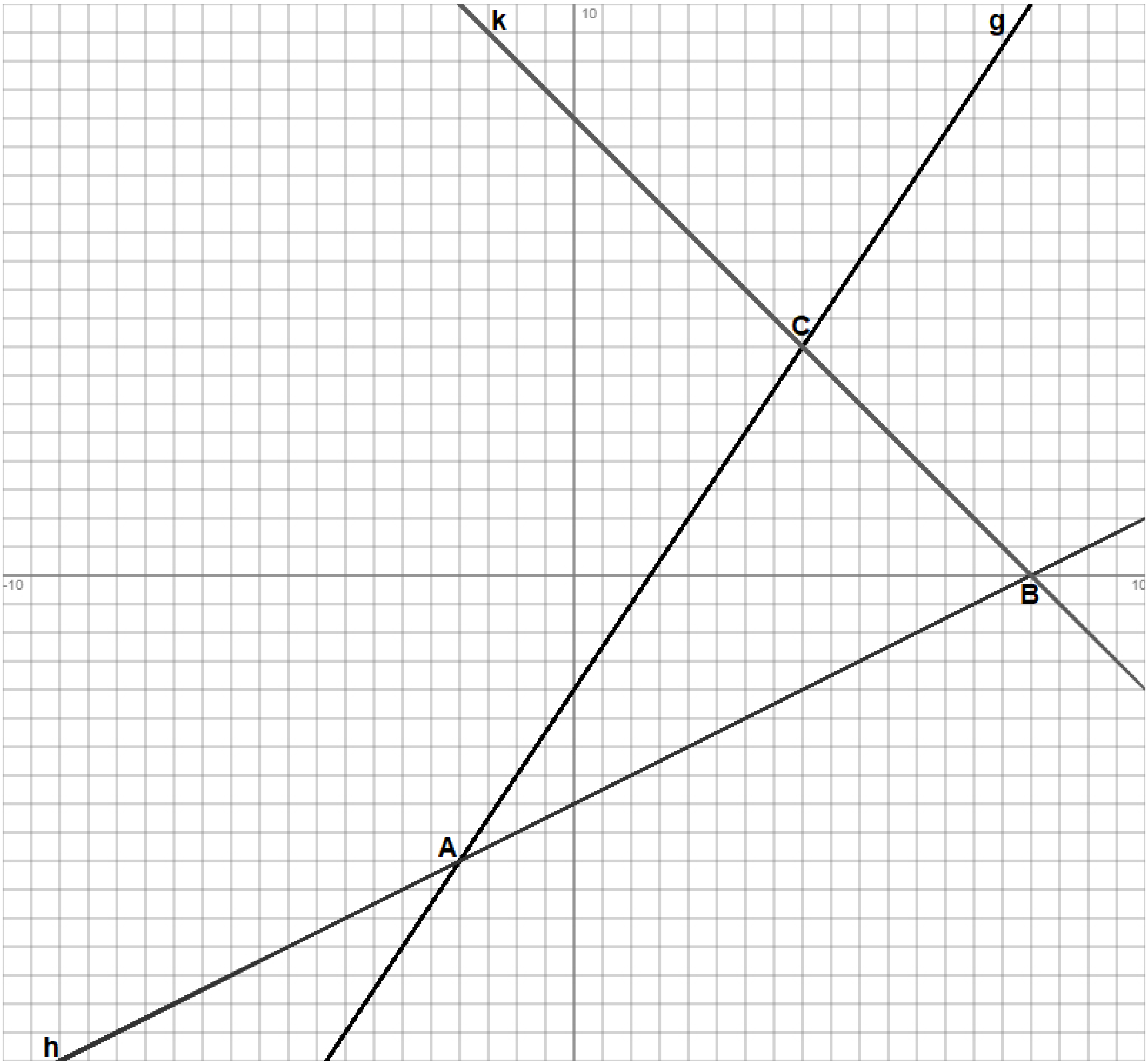
III. Wir errechnen den Schnittpunkt C der Geraden g: y = 1,5x – 2 und k: y = -x + 8 und erhalten durch Gleichsetzen:

y = y
1,5x – 2 = -x + 8 | +x
2,5x – 2 = 8 | +2
2,5x = 10 | :2,5
x = 4

und damit die x-Koordinate des Schnittpunktes C. Einsetzen von x = 4 z.B. in die Geradengleichung von k: y = -x + 8 ergibt die y-Koordinate:

y = -4 + 8 = 4,

so dass der Schnittpunkt lautet: C(4|4).

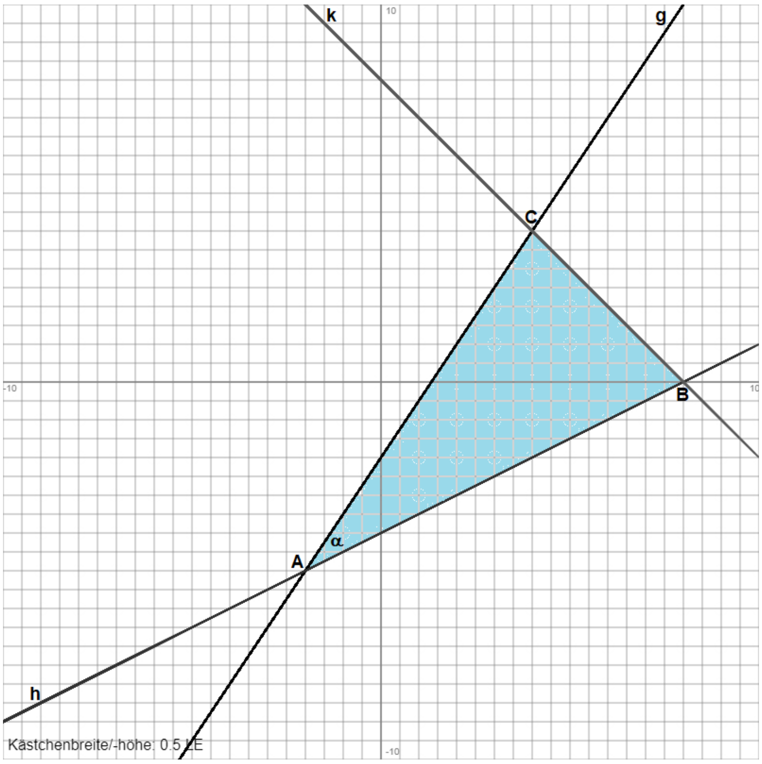


e) Im Dreieck ΔABC heißen die Ecken: A(-2|-5), B(8|0) und C(4|4). Der Dreieckinnenwinkel α liegt an der Ecke A und berechnet sich mit Hilfe der Steigungswinkel der zwei Geraden g: $y = 1,5x - 2$ und h: $y = 0,5x - 4$. Allgemein errechnet sich der Steigungswinkel φ einer Geraden $y = mx + c$ als:

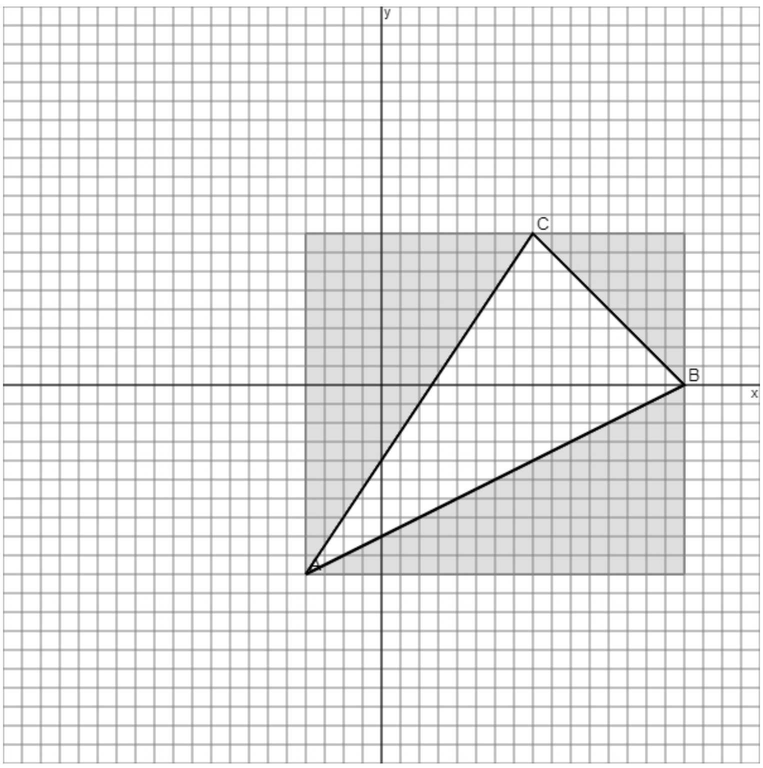
$\varphi = \tan^{-1}(m)$

über die Steigung m der Geraden. Für die Gerade g ergibt sich demgemäß als Steigungswinkel: $\varphi_1 = \tan^{-1}(1,5) = 56,31°$, für die Gerade h als Steigungswinkel: $\varphi_2 = \tan^{-1}(0,5) = 26,57°$. Der gesuchte <u>Innenwinkel</u> α ist offensichtlich die Differenz der beiden Steigungswinkel, also:

$\alpha = \varphi_1 - \varphi_2 = 56,31° - 26,57° = 29,74°$.



f) I. Der Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC kann über drei außen liegende rechtwinklige Dreiecke berechnet werden.



Ist ein Dreieck ABC in einem kartesischen x-y- Koordinatensystem durch seine Eckpunkte A, B, C festgelegt, so erweitert man das Dreieck durch rechtwinklige Dreiecke, so dass die hinzugekommenen rechtwinkligen Dreiecke die (nicht horizontal oder vertikal verlaufenden) Seiten des Dreiecks ABC als Hypotenusen haben. Es entsteht damit ein Rechteck, das das Dreieck ABC als Fläche und die Ecken A, B, C auf seinen Seiten enthält. Der Flächeninhalt A des Dreiecks ABC bestimmt sich aus dem Flächeninhalt des Rechtecks A_R über dessen Seitenlängen und aus den Flächeninhalten der rechtwinkligen Dreiecke A_1, A_2, A_3 über die Katheten, so dass

$$A = A_R - A_1 - A_2 - A_3$$

gilt.

II. Laut obiger Zeichnung sind die Ecken des das Dreieck ΔABC umgebenden Rechtecks: $R_1 = A(-2|-5)$, $R_2(8|-5)$, $R_3(8|4)$, $R_4(-2|4)$. Der Flächeninhalt A_R des Rechtecks ist mit $a = 8 - (-2) = 10$ und $b = 4 - (-5) = 90$ also:

$$A_R = 10 \cdot 9 = 90 \text{ FE.}$$

Für die drei rechtwinkligen Dreiecke unten, rechts, links des Dreiecks ΔABC erhalten wir auf Grund der jeweils zugehörigen Katheten die Flächeninhalte A_1, A_2, A_3:

$$A_1 = 10 \cdot 5/2 = 25 \text{ FE}$$
$$A_2 = 4 \cdot 4/2 = 8 \text{ FE}$$
$$A_3 = 6 \cdot 9/2 = 27 \text{ FE.}$$

Der gesuchte Flächeninhalt A des Dreiecks ΔABC errechnet sich dann als:

$$A = A_R - A_1 - A_2 - A_3 = 90 - 25 - 8 - 27 = 30 \text{ FE.}$$

III. Alternativ lässt sich der Flächeninhalt A des Dreiecks ΔABC mit Hilfe der trigonometrischen Flächenformel:

$$A = bc \cdot \sin(\alpha)/2$$

mit den Dreieckseiten b, c und dem oben errechneten Innenwinkel $\alpha = 29{,}74°$ bestimmen. Danach ergibt sich nach dem Satz des Pythagoras in den sich an den Seiten b, c anschließenden rechtwinkligen Dreiecken ΔACR_4 und ΔABR_2 die Dreieckseite b als:

$$b^2 = 6^2 + 9^2 = 117 \Rightarrow b = 10{,}81 \text{ LE,}$$

die Dreieckseite c als:

$$c^2 = 10^2 + 5^2 = 125 \Rightarrow c = 11{,}18 \text{ LE.}$$

Aus der Anwendung der Flächenformel folgt der gesuchte Flächeninhalt:

$$A = 10{,}81 \cdot 11{,}18 \cdot \sin(29{,}74°)/2 = 10{,}81 \cdot 11{,}18 \cdot 0{,}4961/2 = 29{,}98 \approx 30 \text{ FE.}$$

(FE = Flächeneinheiten, LE = Längeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 10.2022 / Aufgabe 1731