Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Funktionen
> Geraden

Aufgabe: Gegeben seien die Geraden g: $y = 0{,}5x + 4$, h: $y + x + 2 = 0$ und k: $x = 6$.

a) Zeichne die Graphen der Geraden g, h, k in ein geeignetes x-y-Koordinatensystem ein.

b) Die Geraden g und h schneiden sich im Punkt A, die Geraden h und k im Punkt B, die Geraden g und k im Punkt C. Berechne die Schnittpunkte.

c) Die Punkte A, B, C bilden das Dreieck ΔABC. Berechne den Innenwinkel α, β, γ des Dreiecks an den Ecken A, B, C.

d) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC.

Lösung: a) I. Die Gerade h: $y + x + 2 = 0$ ist in der allgemeinen Form einer Geradengleichung gegeben. Wir stellen diese nach y wie folgt um:

$y + x + 2 = 0 \quad | -x$
$y + 2 = -x \quad | -2$
$y = -x - 2$

II. Zur Darstellung des Graphen einer Geraden $y = mx + c$ in einem rechtwinkligen x-y-Koordinatensystem ist auf die Zahlen m und c zu verweisen. Die Zahl c gibt den Schnittpunkt des Graphen mit der y-Achse an, so dass im x-y-Koordinatensystem im Ursprung ($c = 0$), auf dem positiven Teil der y-Achse ($c > 0$) oder auf dem negativen Teil der y-Achse ($c < 0$) der y-Achsenabschnittspunkt $S_y(0|c)$ einzutragen ist.
Wir verwenden nun noch die Steigung m, die im Fall einer rationalen Zahl m, als Bruch $m = p/q$ (mit p als ganzer, q als natürlicher Zahl) dargestellt werden kann. Der Bruch steht für das sog. Steigungsdreieck der Geraden, d.h. für ein rechtwinkliges Dreieck, das q Längeneinheiten in x-Richtung und p Längeneinheiten in y-Richtung groß ist. Geht man im x-y-Koordinatensystem vom Punkt $S_y(0|c)$ in horizontaler Richtung q Längeneinheiten nach rechts und in vertikaler Richtung p Längeneinheiten nach oben ($m > 0$) bzw. nach unten ($m < 0$), so erhält man den zweiten, oberen bzw. unteren Punkt im Steigungsdreieck, der auch auf dem Graphen der Geraden liegt. Der Graph der Geraden ist die über die beiden Punkte hinausgehende Verbindung zwischen den Punkten. Angemerkt sei noch, dass wenn die Steigung m eine ganze Zahl ist, diese als Bruch m/1 dargestellt werden kann (mit 1 Längeneinheit in x-Richtung und m Längeneinheiten in y-Richtung nach oben bzw. unten im Steigungsdreieck).

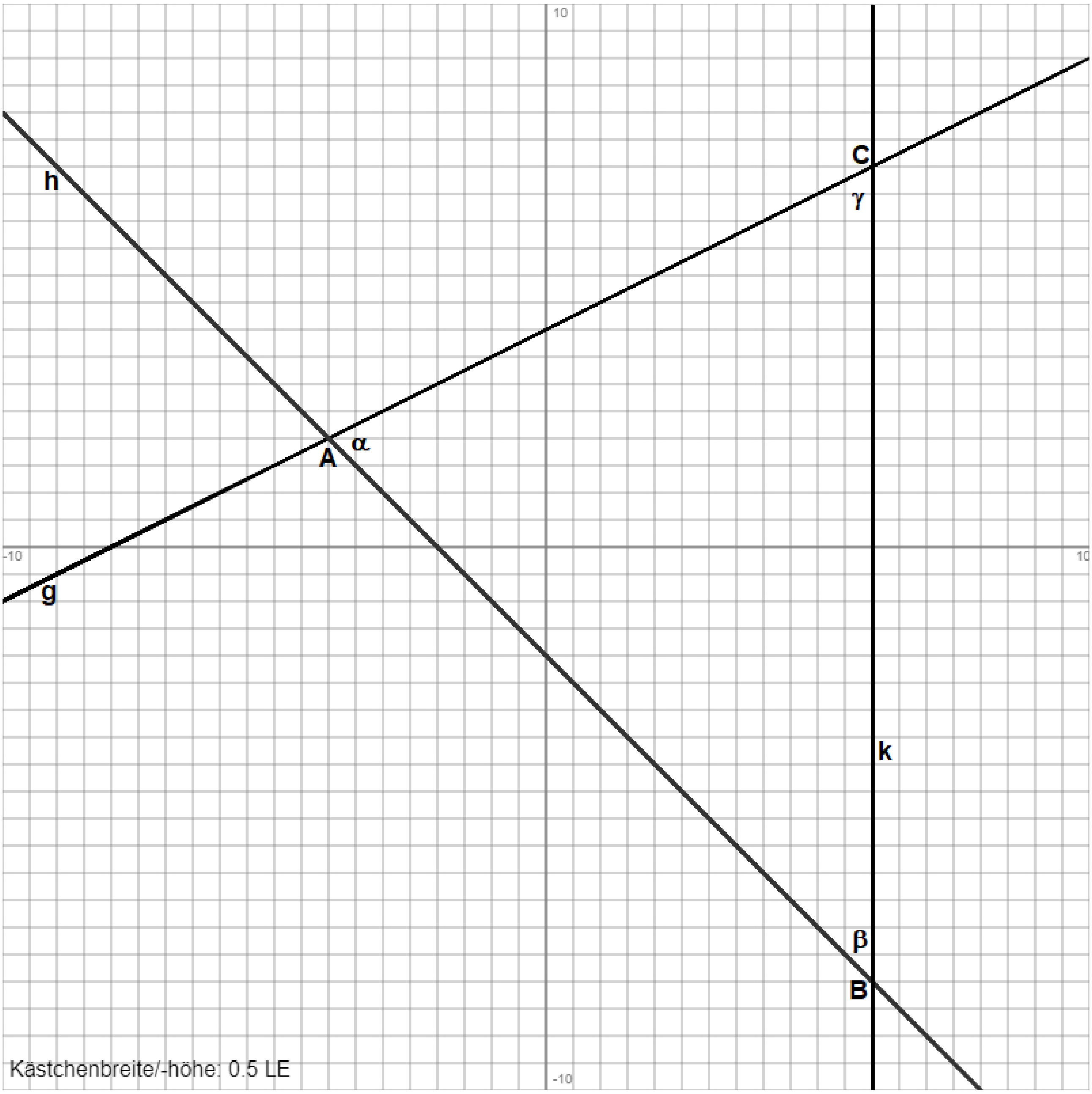
Die Graphen der beiden Geraden g: $y = 0{,}5x + 4$ und h: $y = -x - 2$ erhalten wir also über die y-Achsenabschnitte $c = 4$ bzw. $c = -2$ und über die Steigungen $m = 0{,}5$ bzw. $m = -1$ gemäß der eben beschriebenen Art und Weise.

III. Geraden vom Typ $y = c$ mit reeller Zahl c stellen im x-y- Koordinatensystem waagerechte Geraden parallel zur x-Achse dar, Geraden vom Typ $x = c$ sind senkrechte Geraden parallel zur y-Achse. Somit ist die Gerade k: $x = 6$ senkrecht im Koordinatensystem einzuzeichnen.

b) Gleichsetzen der und Einsetzen in die Geradengleichungen von g, h, k führen zu den errechnenden Geradenschnittpunkten A, B, C. Gleichsetzen der Geradenterme g: $y = 0{,}5x + 4$ und h: $y = -x - 2$ ergibt:

$y = y$
$0{,}5x + 4 = -x - 2 \quad | +x$
$1{,}5x + 4 = -2 \quad | -4$
$1{,}5x = -6 \quad | :1{,}5$
$x = -4$

und damit die x-Koordinate des Schnittpunktes A. Einsetzen der x-Koordinate in den Geradenterm von g führt auf die y-Koordinate des Schnittpunktes: $y = 0,5\cdot(-4) + 4 = 2$, so dass der Schnittpunkt A(-4|2) lautet.
Der Schnittpunkt B der Geraden h: $y = -x – 2$ und k: $x = 6$ folgt mit dem Einsetzen der x-Koordinate $x = 6$ in den Geradenterm von h: $y = -6 – 2 = -9$, so dass der Schnittpunkt B(6|-8) heißt. Auf dieselbe Weise ergibt sich der Schnittpunkt C der Geraden g: $y = 0,5x + 4$ und k: $x = 6$: x-Koordinate ist $x = 6$, y-Koordinate $y = 0,5\cdot6 + 4 = 7$; der Schnittpunkt heißt: C(6|7).
Die Graphen der Geraden g, h, k im x-y-Koordinatensystem sowie die Schnittpunkte A, B, C genügen dann der nachstehenden Darstellung:



c) Im Dreieck ΔABC heißen die Ecken: A(-4|2), B(6|-8) und C(6|7). Der Dreieckinnenwinkel α liegt an der Ecke A und berechnet sich mit Hilfe der Steigungswinkel der zwei Geraden g: $y = 0,5x + 4$ und h: $y = -x – 2$. Allgemein errechnet sich der Steigungswinkel φ einer Geraden $y = mx +c$ als:

$\varphi = \tan^{-1}(m)$

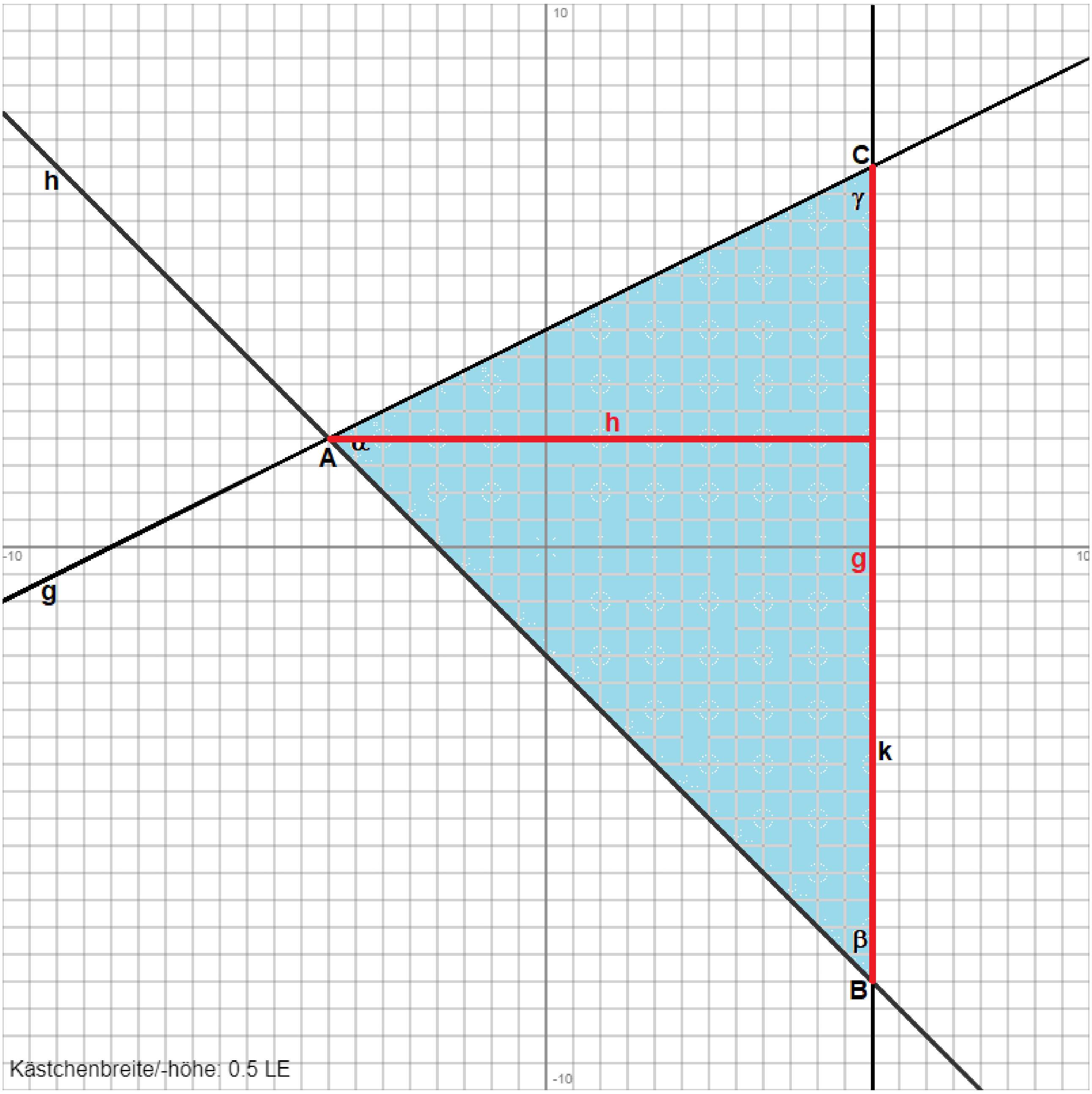
über die Steigung m der Geraden. Für die Gerade g ergibt sich demgemäß als Steigungswinkel: $\varphi_1 = \tan^{-1}(0,5) = 26,57°$, für die Gerade h als Steigungswinkel: $\varphi_2 = \tan^{-1}(-1) = -45°$. Der gesuchte <u>Innenwinkel</u> α ist offensichtlich die Differenz der beiden Steigungswinkel, also:

$\alpha = \varphi_1 – \varphi_2 = 26,57° – (-45°) = 71,57°$.

Eine ähnliche Vorgehensweise gilt für den Innenwinkel β an der Ecke B. Der Steigungswinkel der Geraden h: $y = -x – 2$ ist – wie eben errechnet: $\varphi_2 = \tan^{-1}(-1) = -45°$. Für den Winkel β folgt:

$\beta = 90° + \varphi_2 = 90° + (-45°) = 45°$.
Auf Grund der Winkelsumme von 180° im Dreieck berechnet sich der Winkel γ als:
$\gamma = 180° – \alpha – \beta = 180° – 71,57° – 45° = 63,43°$.
Damit sind alle Innenwinkel bestimmt.

d) Die Fläche A eines Dreiecks berechnet sich aus Grundseite g und Höhe h vermöge: A = gh/2.



Als Grundseite g des Dreiecks ΔABC nehmen wir die senkrechte Strecke zwischen den Ecken B und C, also:
g = 7 – (-8) = 15 LE.
Die Höhe h im Dreieck ist die zu g senkrechte Strecke zwischen der Ecke A und g:
h = 6 – (-4) = 10 LE.
Der Flächeninhalt A des Dreiecks ΔABC ist damit:
A = 15·10/2 = 75 FE.

(FE = Flächeneinheiten, LE = Längeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 11.2022 / Aufgabe 1736