Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Funktionen
> Geraden

Aufgabe: Die Geraden g, h, k: schneiden sich in einem Punkt P(2|4).

a) Die Gerade g verläuft zudem durch den Punkt Q(6|6), die Gerade h besitzt die Steigung m = -2, die Gerade k verläuft im x-y-Koordinatensystem senkrecht. Zeichne die Graphen der Geraden g, h, k in ein geeignetes x-y-Koordinatensystem ein.

b) Berechne alle drei Geradengleichungen von g, h, k.

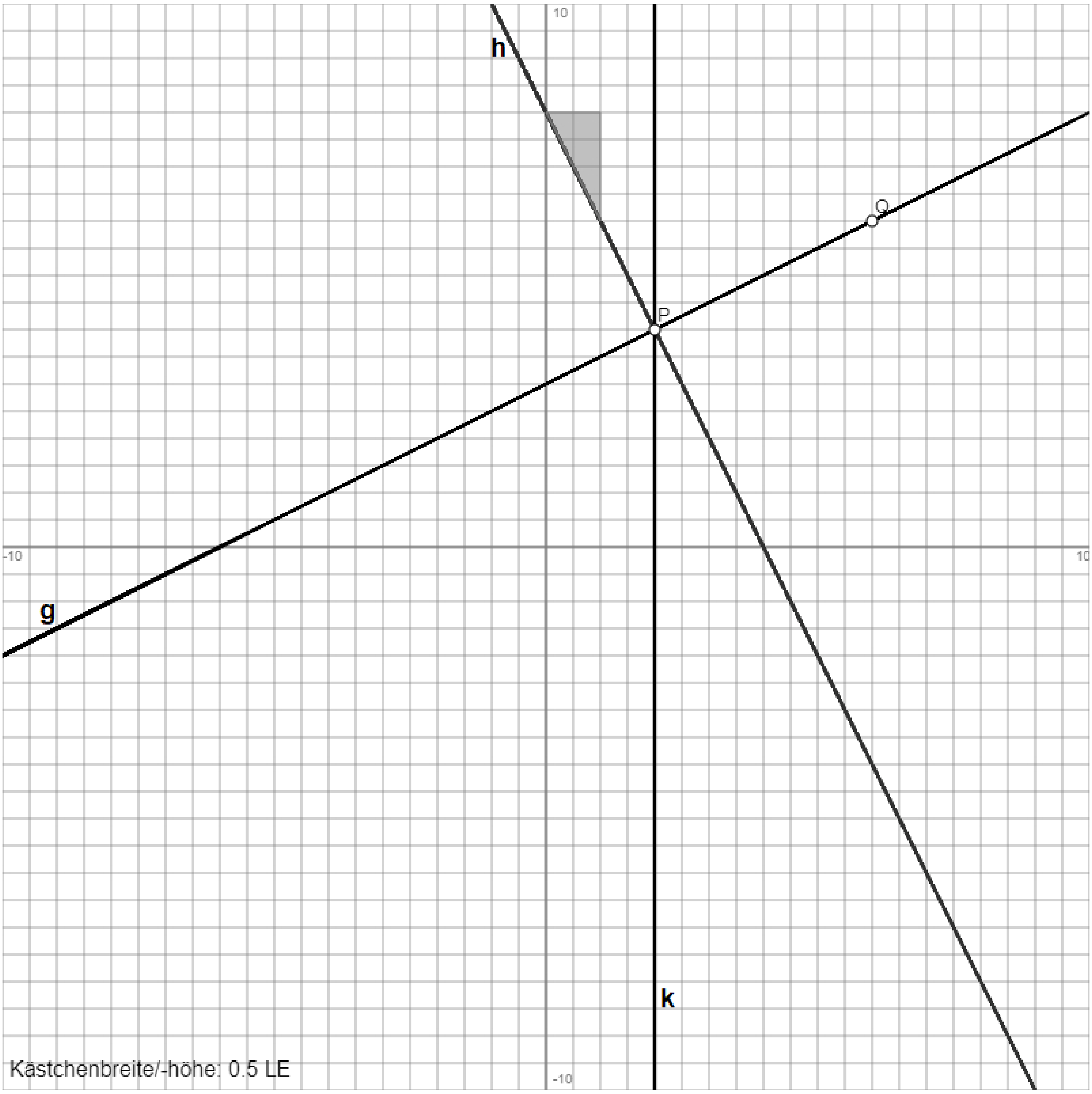
c) Zeige: Die Geraden g und h schneiden sich im Punkt P im rechten Winkel.

d) Zusammen mit den Schnittpunkten der Geraden g und h mit der x-Achse bildet der Punkt P ein Dreieck. Berechne den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

Lösung: a) I. Zur Darstellung des Graphen einer Geraden durch zwei Punkte P und Q sind Letztere im x-y-Koordinatensystem einzuzeichnen. Die Gerade – hier g durch die Punkte P(2|4) und Q(6|6) – verläuft durch die eingezeichneten Punkte (Zweipunkteform).

II. Die Gerade y = mx + c mit vorgegebenen Punkt P und vorgegebener Steigung m lässt sich im x-y-Koordinatensystem darstellen, indem der Punkt P eingezeichnet wird und daran das Steigungsdreieck. Die Steigung m kann im Fall einer rationalen Zahl m, als Bruch m = p/q (mit p als ganzer, q als natürlicher Zahl) dargestellt werden. Der Bruch steht für das sog. Steigungsdreieck der Geraden, d.h. für ein rechtwinkliges Dreieck, das q Längeneinheiten in x-Richtung und p Längeneinheiten in y-Richtung groß ist. Geht man im x-y-Koordinatensystem vom Punkt P in horizontaler Richtung q Längeneinheiten nach rechts und in vertikaler Richtung p Längeneinheiten nach oben (m > 0) bzw. nach unten (m < 0), so erhält man den zweiten, oberen bzw. unteren Punkt im Steigungsdreieck, der auch auf dem Graphen der Geraden liegt. Der Graph der Geraden ist die über die beiden Punkte hinausgehende Verbindung zwischen den Punkten (Punktsteigungsform). Angemerkt sei noch, dass wenn die Steigung m eine ganze Zahl ist, diese als Bruch m/1 dargestellt werden kann (mit 1 Längeneinheit in x-Richtung und m Längeneinheiten in y-Richtung nach oben bzw. unten im Steigungsdreieck).
Die Gerade h verläuft durch Punkt P(2|4) und besitzt die Steigung m = -2 = -2/1, d.h.: Den zweiten Geradenpunkt erhalten wir, indem wir von P 1 Längeneinheit in x-Richtung, nach rechts, und zwei Längeneinheiten in y-Richtung, nach unten, gehen. Dier Gerade verläuft durch die eingezeichneten Punkte (Punktsteigungsform).

III. Die Gerade k erhalten wir, indem wir im x-y-Koordinatensystem durch den Punkt P(2|4) die Senkrechte einzeichnen.



b) I. Zu bestimmen ist die Gerade g: y = mx + c. Sind hinsichtlich einer Geradenbestimmung zwei Punkte $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$ gegeben, so ermittelt sich die Gerade gemäß der Zweipunkteform

durch Errechnen der Geradensteigung $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (mit Hilfe der Koordinaten der Punkte P, Q),

durch Einsetzen von m in die Geradengleichung y = mx + c und durch anschließende Punktprobe mit dem Punkt $P(x_1|y_1)$ (oder Q); Umstellen der Gleichung $y_1 = mx_1 + c$ (oder $y_2 = mx_2 + c$) ergibt den Wert des y-Achsenabschnitts $c = y_1 - mx_1$ (oder $c = y_2 - mx_2$).

II. Gesucht ist hier die Geradengleichung der Geraden g durch die Punkte P(2|4), Q(6|6). Es ergibt sich die Berechnung:

g: y = mx + c (Ansatz)
Punkt P(2|4) -> $x_1 = 2$, $y_1 = 4$; Punkt Q(6|6) -> $x_2 = 6$, $y_2 = 6$ -> Einsetzen (Steigungsformel) ->
Steigung $m = (y_2-y_1)/(x_2-x_1) = (6-4)/(6-2) = 0{,}5$ -> Einsetzen (Steigung) ->
y = 0,5x + c

Punkt P(2|4) -> x = 2, y = 4 -> Einsetzen (Punktprobe) ->
$4 = 0{,}5\cdot 2 + c$ (Ausrechnen)
4 = 1 + c | -1
3 = c

und damit die Geradengleichung: m = 0,5, c = 3 -> g: y = 0,5x + 3.

III. Die Funktionsvorschrift einer allgemeinen Geraden ist ein (Funktions-) Term von der Form g: y = mx + c mit der unabhängigen Variablen x und der abhängigen Variablen y (Geraden-gleichung). Sind hinsichtlich einer Geradenbestimmung ein Punkt $P(x_0|y_0)$ und eine Geradensteigung m gegeben, so errechnet sich die Gerade gemäß der Punktsteigungsform durch Einsetzen der Zahl m in die Geradengleichung y = mx + c und durch anschließende Punktprobe mit dem Punkt $P(x_0|y_0)$; Umstellen der Gleichung $y_0 = mx_0 + c$ ergibt den Wert des y-Achsenabschnitts $c = y_0 – mx_0$.

IV. Gesucht ist die Geradengleichung einer Geraden h durch den Punkt P(2|4) mit der Steigung m = -2. Es ergibt sich die Berechnung:

g: y = mx + c (Ansatz)
Steigung m = -2 -> Einsetzen (Steigung) ->
y = -2x + c
Punkt P(2|4) -> x = 2, y = 4 -> Einsetzen (Punktprobe) ->
4 = -2·2 + c (Ausrechnen)
4 = -4 + c | +4
8 = c

und damit die Geradengleichung: m = -2, c = 8 -> g: y = -2x + 8.

V. Geraden vom Typ y = c mit reeller Zahl c stellen im x-y- Koordinatensystem waagerechte Geraden parallel zur x-Achse dar, Geraden vom Typ x = c sind senkrechte Geraden parallel zur y-Achse. Somit besitzt die Gerade k durch den Punkt P(2|4) die Geradengleichung: k: x = 2 gemäß der x-Koordinate des Punktes P.

c) I. Zwei Geraden $y = m_1x + c_1$, $y = m_2x + c_2$ stehen aufeinander (im rechten Winkel) senkrecht, wenn bzgl. der Steigungen m_1, m_2 gilt: $m_1 \cdot m_2 = -1$. Im Punkt P(2|4) stehen damit die Geraden g: y = 0,5x + 3 , h: y = -2x + 8 im rechten Winkel aufeinander, weil aus $m_1 = 0{,}5$, $m_2 = -2$ folgt: $m_1 \cdot m_2 = 0{,}5 \cdot (-2) = -1$ (Orthogonalität).

II. Alternativ ist der Winkel zwischen den Geraden g: y = 0,5x + 3, h: y = -2x + 8 beim Punkt P(2|4) über die Steigungswinkel der Geraden zu bestimmen. Es gilt:

Steigungswinkel der Geraden g: $\alpha_1 = \tan^{-1}(0{,}5) = 26{,}57°$
Steigungswinkel der Geraden h: $\alpha_2 = \tan^{-1}(-2) = -63{,}43°$
Schnittwinkel zwischen den Geraden g und g: $\alpha = \alpha_1 – \alpha_2 = 26{,}57° – (-63{,}43°) =$
$26{,}57° + 63{,}43° = 90°$,

womit der rechte Winkel bei P nachgewiesen ist.

d) I. Zunächst sind die Nullstellen M, N der Geraden g, h zu bestimmen, d.h. die Schnittpunkte mit der x-Achse. Nullsetzen der Gerade g: y = 0,5x + 3 ergibt:

y = 0
0,5x + 3 = 0 | -3
0,5x = -3 | ·2
x = -6

und damit den Schnittpunkt M(-6|0). Aus dem Nullsetzen der Gerade h: y = -2x + 8 folgt:

y = 0
-2x + 8 = 0 | -8
-2x = -8 | :(-2)
x = 4

und mithin der x-Achsenschnittpunkt N(4|0). Die Nullstellen bilden zusammen mit dem Geradenschnittpunkt P(2|4) das Dreieck ΔMNP laut Aufgabenstellung.

II. Die Fläche A eines Dreiecks berechnet sich aus Grundseite g und Höhe h vermöge: A = gh/2. Als Grundseite g des Dreiecks ΔMNP nehmen wir die waagerechte Strecke zwischen den Ecken M und N, also:

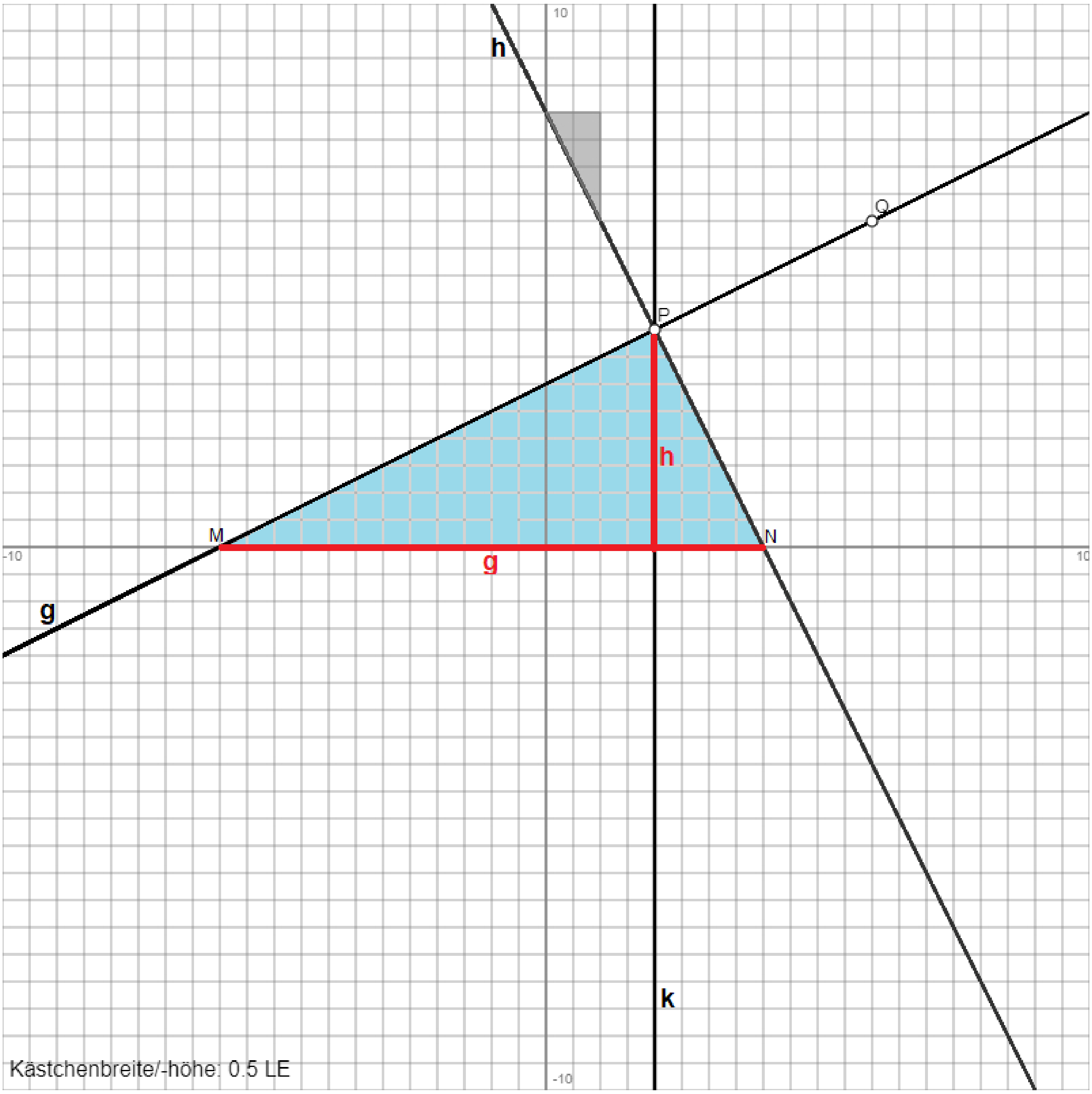
g = 4 – (-6) = 10 LE.

Die Höhe h im Dreieck ist die zu g senkrechte Strecke zwischen der Ecke P und g:

h = 4 – 0 = 4 LE.

Der Flächeninhalt A des Dreiecks ΔMNP ist damit:

A = 10·4/2 = 20 FE.



(FE = Flächeneinheiten, LE = Längeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 11.2022 / Aufgabe 1743