

# Mathematikaufgaben

## > Vektorrechnung

## > Geraden/Ebenen

**Aufgabe:** Bestimme den Schnittpunkt (Durchstoßpunkt) der Geraden g und der Ebenen E mit:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

**Lösung:** Gleichsetzen der Geraden- und Ebenengleichung in Parameterform ergibt das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow r \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -12 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2r + s - 12t = -1 \\ 2r + s - t = 3 \\ -9s + t = -9 \end{cases}$$

Wir wenden auf das lineare Gleichungssystem den Gauß-Algorithmus an und vertauschen zum Aufstellen des Anfangstableaus noch die erste mit der zweiten Gleichung. So erhalten wir:

Anfangstableau:

$$-2 \ 1 \ -12 \ | \ -1$$

$$2 \ 1 \ -1 \ | \ 3$$

$$0 \ -9 \ 1 \ | \ -9$$

1. Schritt:  $1 \cdot (2) + 1 \cdot (1) /$

$$-2 \ 1 \ -12 \ | \ -1$$

$$0 \ 2 \ -13 \ | \ 2$$

$$0 \ -9 \ 1 \ | \ -9$$

2. Schritt:  $2 \cdot (3) + 9 \cdot (2) /$

$$-2 \ 1 \ -12 \ | \ -1$$

$$0 \ 2 \ -13 \ | \ 2$$

$$0 \ 0 \ -115 \ | \ 0$$

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$-2r + 1s - 12t = -1$$

$$+ 2s - 13t = 2$$

$$- 115t = 0$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$$t = 0$$

$$2s - 0 = 2 \Leftrightarrow s = 1$$

$$2r + 1 - 0 = 3 \Leftrightarrow 2r = 2 \Leftrightarrow r = 1$$

Einsetzen von  $r=1$  in g ergibt:  $\vec{OS} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$  und damit den Schnittpunkt:  $S(0|-2|8)$ .