

Mathematikaufgaben

> Vektorrechnung

> Geraden/Ebenen

Aufgabe: Bestimme den Schnittpunkt (Durchstoßpunkt) und den Schnittwinkel der Geraden g und der Ebenen E mit:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -13 \\ -24 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, E: x_1 - x_2 + 4x_3 = 10.$$

1. Lösung: I. Schnittpunkt: Einsetzen der Geraden- in die Ebenengleichung ergibt:

$$g \rightarrow x_1 = 8 - r, x_2 = -13 + 2r, x_3 = -24 + 5r \rightarrow E \rightarrow (8-r) - (-13+2r) + 4(-24+5r) = 10 \quad (*)$$

Die Gleichung (*) lösen wir nach r auf:

$$(8-r) - (-13+2r) + 4(-24+5r) = 10 \Leftrightarrow$$

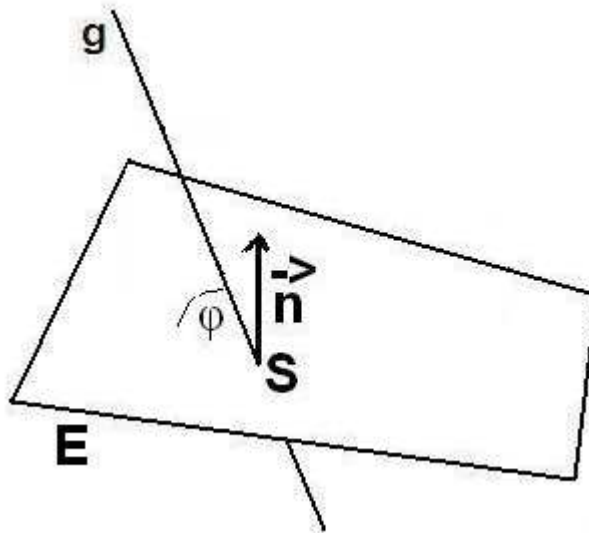
$$8 - r + 13 - 2r - 96 + 20r = 10 \Leftrightarrow$$

$$17r - 75 = 10 \Leftrightarrow$$

$$17r = 85 \Leftrightarrow$$

$$r = 5$$

Einsetzen von $r=5$ in g ergibt: $\vec{OS} = \begin{pmatrix} 8 \\ -13 \\ -24 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und damit den Schnittpunkt: $S(3|-3|1)$.



II. Schnittwinkel: Wir verwenden die Formel für Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene, d.h. für den Winkel zwischen dem Richtungsvektor der Geraden und dem Normalenvektor der Ebene:

$$\sin \varphi = \frac{\left| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|-1-2+20|}{\sqrt{1^2+2^2+5^2} \cdot \sqrt{1^2+1^2+4^2}} = \frac{17}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{18}} = 0,8959 \Rightarrow \varphi = 63,63^\circ$$

2. Lösung: I. Schnittpunkt: Die Ebenengleichung E in Koordinatenform lautet in Normalenform:

E: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 10$. Wir setzen in die Normalenform für den Vektor \vec{x} die Geradenterm g ein und er-

halten unter Verwendung des Skalarprodukts:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 8 \\ -13 \\ -24 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right] = 10 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -13 \\ -24 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 10 \Leftrightarrow -75 + 17r = 10 \Leftrightarrow 17r = 85 \Leftrightarrow r = 5$$

Einsetzen von $r=5$ in g ergibt: $\vec{OS} = \begin{pmatrix} 8 \\ -13 \\ -24 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und damit den Schnittpunkt: S(3|-3|1).

II. Schnittwinkel: Wir verwenden die Formel für Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene, d.h. für den Winkel zwischen dem Richtungsvektor der Geraden und dem Normalenvektor der Ebene:

$$\sin \varphi = \frac{\left| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|-1-2+20|}{\sqrt{1^2+2^2+5^2} \cdot \sqrt{1^2+1^2+4^2}} = \frac{17}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{18}} = 0,8959 \Rightarrow \varphi = 63,63^\circ$$

07.2014 / Aufgabe 23