Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Geraden/Ebenen

Aufgabe: Bestimme den Schnittpunkt (Durchstoßpunkt) und den Schnittwinkel der Geraden g und der Ebene E mit:

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -13 \\ -24 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, E: $x_1 - x_2 + 4x_3 = 10$.

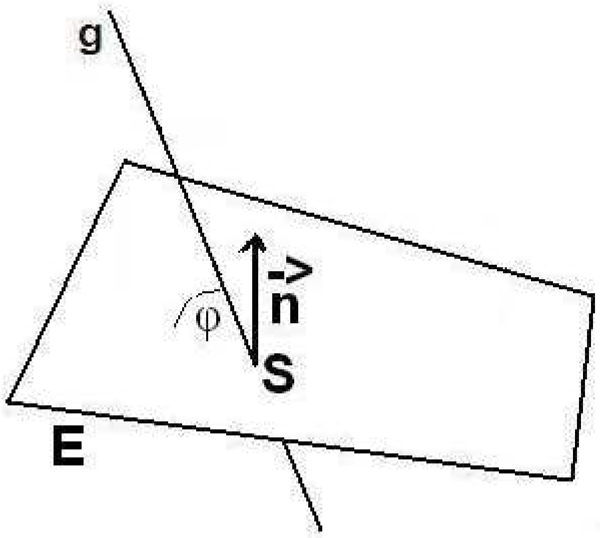
1. Lösung: I. Schnittpunkt: Einsetzen der Geraden- in die Ebenengleichung ergibt:

g -> $x_1 = 8 - r$, $x_2 = -13 + 2r$, $x_3 = -24 + 5r$ -> E -> (8–r) – (-13+2r) + 4(-24+5r) = 10 (*)

Die Gleichung (*) lösen wir nach r auf:

(8–r) – (-13+2r) + 4(-24+5r) = 10 ⇔
8 – r + 13 – 2r – 96 + 20r = 10 ⇔
17r – 75 = 10 ⇔
17r = 85 ⇔
r = 5

Einsetzen von r=5 in g ergibt: $\vec{OS} = \begin{pmatrix} 8 \\ -13 \\ -24 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und damit den Schnittpunkt: S(3|-3|1).



II. Schnittwinkel: Wir verwenden die Formel für Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene, d.h. für den Winkel zwischen dem Richtungsvektor der Geraden und dem Normalenvektor der Ebene:

$$\sin\varphi = \frac{\left|\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|-1-2+20|}{\sqrt{1^2+2^2+5^2} \cdot \sqrt{1^2+1^2+4^2}} = \frac{17}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{18}} = 0{,}8959$$ => φ = 63,63°.

2. Lösung: I. Schnittpunkt: Die Ebenengleichung E in Koordinatenform lautet in Normalenform:

E: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \vec{x} = 10$. Wir setzen in die Normalenform der Ebene für den Vektor $\vec{x}$ die Geradenglei-

chung g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -13 \\ -24 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ ein und erhalten unter Verwendung des Skalarprodukts:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 8 \\ -13 \\ -24 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right] = 10 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ -13 \\ -24 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 10 \Leftrightarrow -75 + 17r = 10 \Leftrightarrow 17r = 85 \Leftrightarrow r = 5.$$

Einsetzen von r=5 in g ergibt: $\vec{OS} = \begin{pmatrix} 8 \\ -13 \\ -24 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und damit den Schnittpunkt: S(3|-3|1).

II. Schnittwinkel: Wir verwenden die Formel für Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene, d.h. für den Winkel zwischen dem Richtungsvektor der Geraden und dem Normalenvektor der Ebene:

$$\sin\varphi = \frac{\left| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|-1-2+20|}{\sqrt{1^2+2^2+5^2} \cdot \sqrt{1^2+1^2+4^2}} = \frac{17}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{18}} = 0{,}8959$$ => φ = 63,63°.

www.michael-buhlmann.de / 07.2014 / Aufgabe 23