Michael Buhlmann

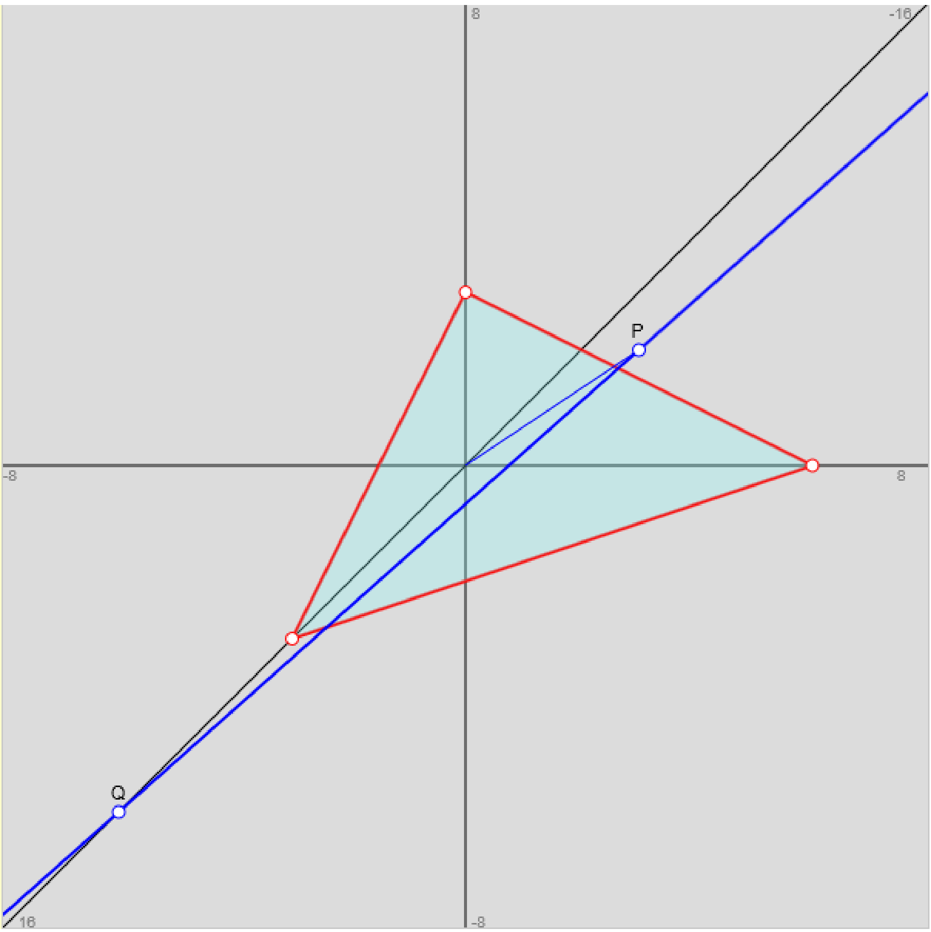
Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Geraden/Ebenen

Aufgabe: Bestimme zum P(2|4|3) und zur Ebene E mit:

$$E: x_1 + x_2 + 2x_3 = 6$$

eine Gerade g, die durch den Punkt P und parallel zur Ebene E verläuft und die x_1-Achse schneidet. In welchem Punkt Q schneidet die Gerade g die x_1-Achse?

1. Lösung: I. Wir haben die folgende Situation mit der Ebene E und deren Spurpunkten $S_1(6|0|0)$, $S_2(0|6|0)$, $S_3(0|0|3)$ sowie mit dem Punkt P und der Geraden g durch P und Q, wobei Q der gesuchte Punkt auf der x_1-Achse ist:



II. Geradenbestimmung: Der Normalenvektor der Ebene E ist: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Für die gesuchte Gerade g, die durch den P(2|4|3) läuft, nehmen wir den Ansatz:

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

mit einem noch unbekannten Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $v_1 = 1$ setzen und wegen der Parallelität von Ebene E und Gerade g die Orthogonalität von Normalenvektor und Richtungsvektor ausnutzen; also:

$\vec{n} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 1+v_2+2v_3 = 0 \Leftrightarrow 2v_3 = -1-v_2 \Leftrightarrow v_3 = -0{,}5-0{,}5v_2$.

Wir haben damit die Geradengleichung

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ v_2 \\ -0{,}5-0{,}5v_2 \end{pmatrix}$

erhalten und müssen noch v_2 bestimmen. Die Gerade g soll die x_1-Achse schneiden, daher muss für die entsprechenden x_2-, x_3-Komponenten der Geradengleichung (im Punkt Q) gelten:

$x_2 = 0 \Leftrightarrow 4+tv_2 = 0 \Leftrightarrow tv_2 = -4$ (1)
$x_3 = 0 \Leftrightarrow 3+t(-0{,}5-0{,}5v_2) = 0 \Leftrightarrow t(-0{,}5-0{,}5v_2) = -3$ (2)

Division der beiden Gleichungen (2):(1) ergibt mit Kürzen des t und Überkreuzmultiplikation:

$$\frac{t(-0{,}5-0{,}5v_2)}{tv_2} = \frac{-3}{-4} \Leftrightarrow \frac{-0{,}5-0{,}5v_2}{v_2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4\cdot(-0{,}5-0{,}5v_2) = 3v_2 \Leftrightarrow -2-2v_2 = 3v_2 \Leftrightarrow -2 = 5v_2$$
$$\Leftrightarrow v_2 = -0{,}4$$

Die Gleichung der Gerade g lautet damit:

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -0{,}4 \\ -0{,}5-0{,}5\cdot(-0{,}4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -0{,}4 \\ -0{,}3 \end{pmatrix}$.

III. Der <u>Achsenabschnittspunkt</u> Q der Gerade g lässt sich aus Gleichung (1) gewinnen, wenn wir $v_2 = -0{,}4$ einsetzen; also:

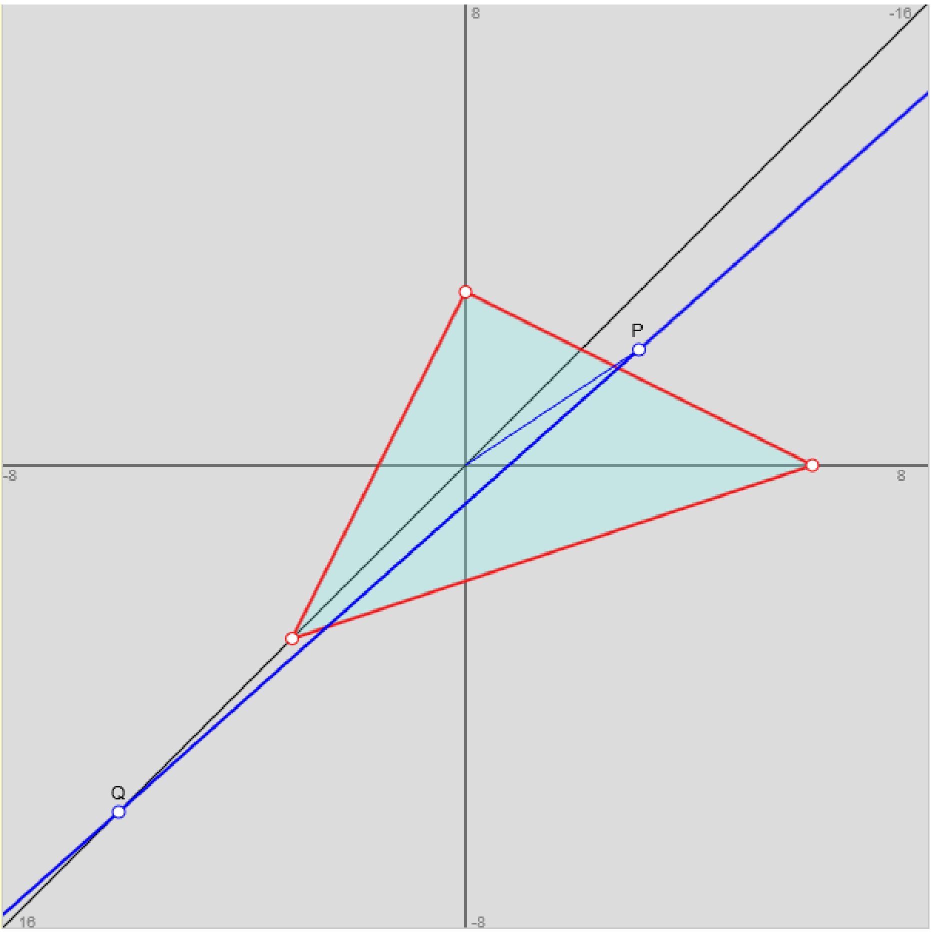
$t\cdot(-0{,}4) = -4 \Leftrightarrow t = 10$

und weiter:

$\vec{OQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + 10 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -0{,}4 \\ -0{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Der Punkt, wo sich x_1-Achse und Gerade schneiden, lautet damit: Q(12|0|0).

2. Lösung: I. Wir haben die folgende Situation mit der Ebene E und deren Spurpunkten $S_1(6|0|0)$, $S_2(0|6|0)$, $S_3(0|0|3)$ sowie mit dem Punkt P und der Geraden g durch P und Q, wobei Q der gesuchte Punkt auf der x_1-Achse ist:



II. Wir bilden zunächst eine zur Ebene E parallele Hilfsebene E_H durch den Punkt P. Einsetzen des Punktes P(2|4|3) in E ergibt dabei die rechte Seite der Hilfsebenengleichung:

E_H: $x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 + 4 + 2\cdot 3 = 12$.

III. Der gesuchte Punkt Q ist dann offensichtlich der x_1-Achsen-Spurpunkt der Hilfsebene; die x_1-Koordinate des Achsenabschnittspunkts ergibt sich aus der Division 12:1 (rechte Seite der Hilfsebenengleichung geteilt durch den x_1-Koeffizienten der Ebenengleichung), so dass für den gesuchten Punkt Q(12|0|0) gilt.

IV. Geradenbestimmung: Die Gerade g ergibt sich aus den beiden Punkten P und Q vermöge:

$$g:\ \vec{x} = \overrightarrow{OP} + t\,\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 12-2 \\ 0-4 \\ 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

www.michael-buhlmann.de / 08.2015 / Aufgabe 141