

Mathematikaufgaben

> Vektorrechnung

> Geraden/Ebenen

Aufgabe: Gegeben seien die Gerade g mit:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

sowie das Ebenenbündel:

$$E_a: (a+1)x_1 + x_2 + (a-1)x_3 = 1$$

für alle reellen Zahlen a.

a) Zeige, dass sich alle Ebenen E_a in einer Schnittgerade s schneiden.

b) Die Gerade g und die Ebene E_3 des Ebenenbündels schneiden sich im Punkt P. Welche Ebenen E_a des Ebenenbündels schneiden die Gerade g in einem Punkt Q, damit der Abstand zwischen den Punkten P und Q 12 Längeneinheiten beträgt?

1. Lösung: a) I. Zur Ermittlung der Schnittgeraden s des Ebenenbündels E_a bestimmen wir zunächst die Schnittgerade zwischen zwei Ebenen, z.B. mit $a=1$ und $a=3$ die Schnittgerade zwischen den Ebenen:

$$E_1: 2x_1 + x_2 = 1$$

$$E_3: 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 1.$$

Gemäß den Koordinatengleichungen der vorgegebenen Ebenen E_1 und E_3 ergibt sich lineares Gleichungssystem mit parametrischer Lösung:

Lineares Gleichungssystem:

$$+ 2x_1 + 1x_2 = 1$$

$$+ 4x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 1$$

Anfangstableau:

$$x_1 \ x_2 \ x_3 \ | \ R.S.$$

$$2 \ 1 \ 0 \ | \ 1$$

$$4 \ 1 \ 2 \ | \ 1$$

1. Schritt: $1 \cdot (2) - 2 \cdot (1) /$

$$2 \ 1 \ 0 \ | \ 1$$

$$0 \ -1 \ 2 \ | \ -1$$

Ergänzung einer Nullzeile:

$$2 \ 1 \ 0 \ | \ 1$$

$$0 \ -1 \ 2 \ | \ -1$$

$$0 \ 0 \ 0 \ | \ 0$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$$x_3 = t$$

$$x_2 = 1 + 2t$$

$$x_1 = -t$$

-> unendlich viele Lösungen des linearen Gleichungssystems; Parameter ist die reelle Zahl t

Die gesuchte Schnittgerade s der Ebenen E_1 und E_3 lautet damit:

$$s: \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 1+2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

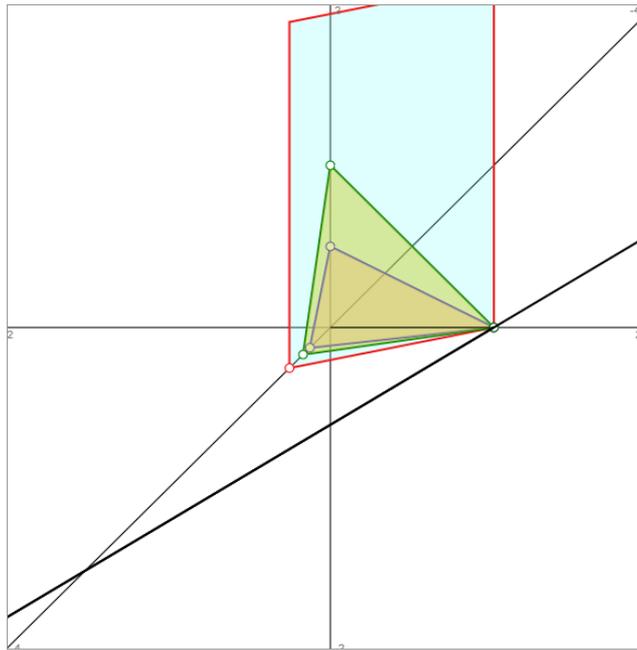
II. In einem 2. Schritt zeigen wir, dass die gefundene Gerade s auf allen Ebenen E_a des Ebenenbüschels liegt. Dann ist die Gerade auch Schnittgerade aller dieser Ebenen. Wir gehen dazu wie folgt vor und schneiden Gerade und beliebige Ebene E_a miteinander:

Gerade $s \rightarrow x_1 = -t, x_2 = 1 + 2t, x_3 = t \rightarrow$ Ebene $E_a \rightarrow$

$$(a+1)(-t) + (1+2t) + (a-1)t = -at - t + 1 + 2t + at - t = 1 = 1 \rightarrow$$

$1 = 1$ als allgemein gültige Aussage (für jedes reelle t, a)

Die Gerade s ist damit Teil jeder Ebene E_a : $g \subset E_a$ für allen reellen Zahlen a .



b) I. Zur Ermittlung des Punktes P als Schnittpunkt von der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und der

Ebene $E_3: 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$ setzen wir die Komponenten der Geraden in die Ebene ein und errechnen den Parameter t :

Gerade $g \rightarrow x_1 = 1 + t, x_2 = 3 - 2t, x_3 = 2t \rightarrow$ Ebene $E_3 \rightarrow$

$$4(1+t) + (3-2t) + 2 \cdot 2t = 1 \Leftrightarrow 4 + 4t + 3 - 2t + 4t = 1 \Leftrightarrow 7 + 6t = 1 \Leftrightarrow 6t = -6 \Leftrightarrow t = -1.$$

Den Parameter $t = -1$ setzen wir in die Geradengleichung ein:

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und erhalten den Schnittpunkt $P(0|5|-2)$.

II. Wollen wir den Schnittpunkt Q von der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und einer beliebigen Ebene

E_a des Ebenenbüschels errechnen, gehen wir ähnlich vor:

Gerade g $\rightarrow x_1 = 1 + t, x_2 = 3 - 2t, x_3 = 2t \rightarrow$ Ebene $E_a \rightarrow$

$$(a+1)(1+t) + (3-2t) + (a-1) \cdot 2t = 1 \Leftrightarrow a + at + 1 + t + 3 - 2t + 2at - 2t = 1 \Leftrightarrow$$

$$a + 3at + 4 - 3t = 1 \Leftrightarrow 3at - 3t + a + 4 = 1 \Leftrightarrow 3t(a-1) + a + 4 = 1 \Leftrightarrow 3t(a-1) = -3 - a \Leftrightarrow$$

$$t = \frac{-3-a}{3(a-1)} = -\frac{a+3}{3(a-1)}$$

Der Schnittpunkt Q ermittelt sich aus:

$$\vec{OQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{a+3}{3(a-1)} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{a+3}{3(a-1)} \\ 3 + \frac{2a+6}{3(a-1)} \\ -\frac{2a+6}{3(a-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3(a-1) - (a+3)}{3(a-1)} \\ \frac{9(a-1) + (2a+6)}{3(a-1)} \\ -\frac{2a+6}{3(a-1)} \end{pmatrix} = \frac{1}{3(a-1)} \begin{pmatrix} 2a-6 \\ 11a-3 \\ -2a-6 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$Q\left(\frac{2a-6}{3(a-1)} \mid \frac{11a-3}{3(a-1)} \mid -\frac{2a+6}{3(a-1)}\right).$$

III. Wir bestimmen jetzt die Punkte Q so, dass der Abstand zwischen P und Q 12 LE beträgt, dass also gilt:

$$\left| \vec{PQ} \right| = 12 \quad (*)$$

Mit

$$\vec{PQ} = \frac{1}{3(a-1)} \begin{pmatrix} 2a-6 \\ 11a-3 \\ -2a-6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2a-6}{3(a-1)} \\ \frac{11a-3}{3(a-1)} \\ -\frac{2a+6}{3(a-1)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2a-6}{3(a-1)} - 0 \\ \frac{11a-3}{3(a-1)} - 5 \\ -\frac{2a+6}{3(a-1)} + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2a-6}{3(a-1)} \\ \frac{-4a+12}{3(a-1)} \\ \frac{4a-12}{3(a-1)} \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{3(a-1)} \begin{pmatrix} 2a-6 \\ -4a+12 \\ 4a-12 \end{pmatrix} = \frac{1}{3(a-1)} \begin{pmatrix} 2(a-3) \\ -4(a-3) \\ 4(a-3) \end{pmatrix} = \frac{2(a-3)}{3(a-1)} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

folgt aus (*):

$$\left| \frac{2(a-3)}{3(a-1)} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = 12 \quad | \cdot 3|a-1|$$

$$\left| 2(a-3) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = 36 |a-1| \quad (\text{Betrag des Vektors bestimmen})$$

$$2|a-3| \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 36|a-1|$$

$$2|a-3| \cdot 3 = 36|a-1| \quad (\text{Zusammenfassen})$$

$$6|a-3| = 36|a-1| \quad | :6$$

$$|a-3| = 6|a-1| \quad (\text{Beträge auflösen})$$

$$a-3 = \pm 6(a-1) \quad (\text{Fallunterscheidung})$$

1. Fall:

$$a-3 = 6(a-1) \quad (\text{Klammer auflösen})$$

$$a-3 = 6a-6 \quad | -a$$

$$-3 = 5a-6 \quad | +6$$

$$3 = 5a \quad | :5$$

$$a = 3/5 = 0,6$$

2. Fall:

$$\begin{array}{l} a-3 = -6(a-1) \quad \text{(Klammer auflösen)} \\ a-3 = -6a+6 \quad \quad \quad | +6a \\ 7a-3 = 6 \quad \quad \quad \quad | +3 \\ 7a = 9 \quad \quad \quad \quad \quad | :7 \\ a = 9/7 \end{array}$$

Die Ebenen sind wegen $a = 0,6$ bzw. $a = 9/7$ schon bekannt als:

$$E_{0,6}: 1,6x_1 + x_2 - 0,4x_3 = 1 \rightarrow E_{0,6}: 8x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 5$$

$$E_{9/7}: \frac{16}{7}x_1 + x_2 + \frac{2}{7}x_3 = 1 \rightarrow E_{9/7}: 16x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 7.$$

Es fehlen noch die zu errechnenden Punkte Q als Q_1, Q_2 mit:

$$Q_1\left(\frac{2 \cdot 0,6 - 6}{3(0,6 - 1)} \mid \frac{11 \cdot 0,6 - 3}{3(0,6 - 1)} \mid -\frac{2 \cdot 0,6 + 6}{3(0,6 - 1)}\right) = Q_1(4 \mid -3 \mid 6)$$

$$Q_2\left(\frac{2 \cdot \frac{9}{7} - 6}{3(\frac{9}{7} - 1)} \mid \frac{11 \cdot \frac{9}{7} - 3}{3(\frac{9}{7} - 1)} \mid -\frac{2 \cdot \frac{9}{7} + 6}{3(\frac{9}{7} - 1)}\right) = Q_2(-4 \mid 13 \mid -10).$$

Die Geradenpunkte Q_1, Q_2 haben vom Geradenpunkt P jeweils den Abstand 12 LE. Weiter sind alle drei Punkte P, Q_1, Q_2 Schnittpunkte der Geraden g mit den Ebenen $E_3, E_{0,6}$ und $E_{9/7}$ des Ebenenbüschels.

2. Lösung: a) Zur Ermittlung der Schnittgeraden s aller Ebenen E_a des Ebenenbüschels bemerken

wir, dass – unter der Voraussetzung der Existenz der Schnittgeraden – der Richtungsvektor \vec{u} der Geraden auf allen Normalenvektoren der Ebenen E_a senkrecht steht. Wir bilden somit das Kreuz-

produkt mit je zwei Normalenvektoren \vec{n}_a und \vec{n}_α der Ebenen E_a und $E_\alpha, a \neq \alpha$:

$$\begin{aligned} \vec{n}_a \times \vec{n}_\alpha &= \begin{pmatrix} a+1 \\ 1 \\ a-1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha+1 \\ 1 \\ \alpha-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha-1) - (a-1) \\ (a-1)(\alpha+1) - (a+1)(\alpha-1) \\ (a+1) - (\alpha+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - a \\ (a\alpha + a - \alpha - 1) - (a\alpha - a + \alpha - 1) \\ a - \alpha \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \alpha - a \\ 2a - 2\alpha \\ a - \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(a - \alpha) \\ 2(a - \alpha) \\ (a - \alpha) \end{pmatrix} = (a - \alpha) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und daraus, weil alle Kreuzproduktvektoren Vielfache voneinander sind, den Richtungsvektor der somit existierenden Schnittgeraden s als:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir benötigen jetzt noch einen Stützvektor für die Schnittgerade. Der Stützvektor muss Ortsvektor eines Punktes P sein, der auf allen Ebenen E_a liegt. Offensichtlich ist dies beim Punkt $P(0|1|0)$ der Fall mit $P \in E_a$ für alle a. Damit lautet die von uns gefundene Gleichung der Schnittgeraden s:

$$s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) I. Zur Ermittlung des Punktes P als Schnittpunkt von der Geraden $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und der

Ebene $E_3: 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$ setzen wir die Komponenten der Geraden in die Ebene ein und er-
rechnen den Parameter t:

Gerade g $\rightarrow x_1 = 1 + t, x_2 = 3 - 2t, x_3 = 2t \rightarrow$ Ebene $E_3 \rightarrow$

$$4(1+t) + (3-2t) + 2 \cdot 2t = 1 \Leftrightarrow 4 + 4t + 3 - 2t + 4t = 1 \Leftrightarrow 7 + 6t = 1 \Leftrightarrow 6t = -6 \Leftrightarrow t = -1.$$

Den Parameter $t = -1$ setzen wir in die Geradengleichung ein:

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und erhalten den Schnittpunkt $P(0|5|-2)$.

II. Gehen wir von der Geraden $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ aus, so liegen die Punkte Q auf der Geraden

12 LE „vor“ und „hinter“ dem Punkt $P(0|5|-2)$. Dies können wir durch Einführen des Einheitsrich-

tungsvektors $\vec{u}_0 = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ so ausdrücken:

$$\vec{OQ} = \vec{OP} \pm 12 \vec{u}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \pm 12 \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \pm 4 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten also die zwei weiteren Geradenpunkte Q_1, Q_2 mit:

$$\vec{OQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \rightarrow Q_1(4|-3|6).$$

$$\vec{OQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 13 \\ -10 \end{pmatrix} \rightarrow Q_2(-4|13|-10)$$

III. Die Geradenpunkte Q_1, Q_2 liegen als Schnittpunkte zwischen Gerade g und gewissen Ebenen E_a des Ebenenbüschels auf den Ebenen E_a , so dass die Parameter a der Ebenen wie folgt zu be-
stimmen sind:

$Q_1(4|-3|6) \rightarrow$ Ebene $E_a \rightarrow$

$$(a+1) \cdot 4 - 3 + (a-1) \cdot 6 = 1 \Leftrightarrow 4a + 4 - 3 + 6a - 6 = 1 \Leftrightarrow 10a - 5 = 1 \Leftrightarrow 10a = 6 \Leftrightarrow$$

$$a = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0,6$$

$Q_2(-4|13|-10) \rightarrow$ Ebene $E_a \rightarrow$

$$(a+1) \cdot (-4) + 13 + (a-1) \cdot (-10) = 1 \Leftrightarrow -4a - 4 + 13 - 10a + 10 = 1 \Leftrightarrow -14a + 19 = 1 \Leftrightarrow -14a = -18 \Leftrightarrow$$

$$a = \frac{18}{14} = \frac{9}{7}$$

Die Ebenen, auf denen die Geradenpunkte Q_1, Q_2 liegen, lauten damit:

$$E_{0,6}: 1,6x_1 + x_2 - 0,4x_3 = 1 \rightarrow E_{0,6}: 8x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 5.$$

$$E_{\frac{9}{7}}: \frac{16}{7}x_1 + x_2 + \frac{2}{7}x_3 = 1 \rightarrow E_{\frac{9}{7}}: 16x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 7$$

(LE = Längeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 04.2020 / Aufgabe 1018