Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Grenzwerte von Funktionen

Aufgabe: Berechne, falls existent, den Grenzwert:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{7x^3 - 2x^4 + x}{x^4 - 5x}.$$

1. Lösung: I. Allgemein gilt für Grenzwerte einer gebrochen rationalen Funktion f(x):

Grenzwerte bei gebrochen rationalen Funktionen
Gebrochen rationale Funktion: $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0}$ (m, nε$\mathbf{N_0}$)
I. Gebrochen rationale Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich D_f stetig, d.h. es gilt für jedes $x_0 \varepsilon D_f$: $$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\x<x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\x>x_0}} f(x) = f(x_0)$$ mit der Übereinstimmung von allgemeinem, linksseitigem, rechtsseitigem Grenzwert mit dem Funktionswert.
II. Daneben existieren auch Grenzwerte für x -> ±∞, indem der Bruch der gebrochen rationalen Funktion f(x) durch die höchste Potenz des Nenners gekürzt wird, gemäß: $$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^{n-m} + a_{n-1}x^{n-1-m} + ... + a_1 x^{1-m} + a_0 x^{-m}}{b_m + b_{m-1}x^{-1} + ... + b_1 x^{1-m} + b_0 x^{-m}} =$$ $$\frac{a_n \lim_{x\to\pm\infty} x^{n-m} + a_{n-1} \lim_{x\to\pm\infty} x^{n-1-m} + ... + a_1 \lim_{x\to\pm\infty} x^{1-m} + a_0 \lim_{x\to\pm\infty} x^{-m}}{b_m + b_{m-1} \lim_{x\to\pm\infty} x^{-1} + ... + b_1 \lim_{x\to\pm\infty} x^{1-m} + b_0 \lim_{x\to\pm\infty} x^{-m}} =$$ $$\begin{cases} \frac{a_n \cdot 0 + a_{n-1} \lim_{x\to\pm\infty} \cdot 0 + ... + a_1 \cdot 0 + a_0 \cdot 0}{b_m + b_{m-1} \cdot 0 + ... + b_1 \cdot 0 + b_0 \cdot 0} = 0 & \text{(falls n < m)} \\ \frac{a_n \cdot 1 + a_{n-1} \lim_{x\to\pm\infty} \cdot 0 + ... + a_1 \cdot 0 + a_0 \cdot 0}{b_m + b_{m-1} \cdot 0 + ... + b_1 \cdot 0 + b_0 \cdot 0} = \frac{a_n}{b_m} & \text{(falls n = m).} \end{cases}$$ Die uneigentlichen Werte x = ±∞ sind dabei Randstellen des Definitionsbereichs D_f der Funktion f(x).
III. Die Grenzwerte für x -> ±∞ existieren auch gemäß der Regel: $$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0} \quad \begin{cases} \to 0 & \text{falls n < m} \\ \to \frac{a_n}{b_m} & \text{falls n = m} \\ \to \pm\infty & \text{falls n > m,} \end{cases}$$ d.h. die Grenzwerte sind reelle Zahlen im Fall, dass die gebrochen rationale Funktion eine waagerechte Asymptote als Grenzkurve besitzt.

Grenzwerte bei gebrochen rationalen Funktionen

II. Das Kürzen des Bruchs $\frac{7x^3 - 2x^4 + x}{x^4 - 5x}$ durch die (gleiche) höchste Potenz x^4 beim (Zähler und) Nenner führt auf:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{7x^3 - 2x^4 + x}{x^4 - 5x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{7}{x} - 2 + \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{5}{x^3}} = \frac{\lim_{x\to\infty} \frac{7}{x} - 2 + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^3}}{1 - \lim_{x\to\infty} \frac{5}{x^3}} = \frac{0 - 2 + 0}{1 - 0} = -2 .$$

III. Eine weitere Möglichkeit der Grenzwertbestimmung ist die nachstehende: Die gebrochen rationale Funktion $f(x)=\frac{7x^3-2x^4+x}{x^4-5x}$ besteht als Bruch von Polynomen aus dem Zählerpolynom $f_1(x)=7x^3-2x^4+x=-2x^4+7x^3+x$ und dem Nennerpolynom $f_2(x)=x^4-5x$. Beide Polynome haben denselben Grad 4, so dass die Funktion f(x) eine waagerechte Asymptote besitzt und für den gesuchten Grenzwert gilt:

$$\lim_{x->\infty}\frac{7x^3-2x^4+x}{x^4-5x}=\frac{-2}{1}=-2\,.$$

2. Lösung: I. Allgemein gilt für Grenzwerte einer gebrochen rationalen Funktion f(x):

Grenzwerte bei gebrochen rationalen Funktionen
Gebrochen rationale Funktion: $f(x)=\frac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0}$ (m, nε$\mathbf{N_0}$)
I. Gebrochen rationale Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich D_f stetig, d.h. es gilt für jedes $x_0 \varepsilon D_f$: $\lim_{x->x_0} f(x)=\lim_{\substack{x->x_0\\x<x_0}} f(x)=\lim_{\substack{x->x_0\\x>x_0}} f(x)=f(x_0)$ mit der Übereinstimmung von allgemeinem, linksseitigem, rechtsseitigem Grenzwert mit dem Funktionswert.
II. Für alle Randstellen des Definitionsbereichs D_f der gebrochen rationalen Funktion f(x), die auf dem Definitionsbereich auch differenzierbar ist, gilt die Regel von de l'Hospital. Undefinierte Ausdrücke vom Typ „$\frac{0}{0}$“ oder „$\frac{\infty}{\infty}$“ lassen sich im Fall ihrer Existenz damit errechnen vermöge der Identität: $\lim_{x->x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\lim_{x->x_0}\frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}$, wobei für die differenzierbaren Funktionen $f_1(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ (Zählerpolynom der gebrochen rationalen Funktion f(x)) und $f_2(x)=b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0$ (Nennerpolynom der gebrochen rationalen Funktion f(x)) die Bedingung $f_1(x_0) = f_2(x_0) = 0$ für $x_0 \varepsilon \mathbf{R}$ oder $x_0 = \pm\infty$ gilt (die uneigentlichen Werte $\pm\infty$ sind also zugelassen).

Grenzwerte bei gebrochen rationalen Funktionen

II. Durch mehrfaches Anwenden der Regel von de l'Hospital (Terme vom Typ „$\frac{\infty}{\infty}$“, jeweilige Ableitungen des Zählers und des Nenners) folgt hinsichtlich des zu bestimmenden Grenzwerts:

$$\lim_{x->\infty}\frac{7x^3-2x^4+x}{x^4-5x}\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x->\infty}\frac{21x^2-8x^3+1}{4x^3-5}\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x->\infty}\frac{42x-24x^2}{12x^2}\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x->\infty}\frac{42-48x}{24x}\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x->\infty}\frac{-48}{24}=-2\,.$$

Natürlich können die bei der Rechnung auftretenden Brüche auch, falls möglich, gekürzt werden; also:

$$\lim_{x->\infty}\frac{7x^3-2x^4+x}{x^4-5x}=\lim_{x->\infty}\frac{7x^2-2x^3+1}{x^3-5}\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x->\infty}\frac{14x-6x^2}{3x^2}=\lim_{x->\infty}\frac{14-6x}{3x}\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x->\infty}\frac{-6}{3}=-2\,.$$

www.michael-buhlmann.de / 11.2020 / Aufgabe 1180