Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Grenzwerte von Funktionen/L'Hospital-Regel

Aufgabe: Berechne den Grenzwert:

$$\lim_{\substack{x->0\\x>0}} x^x .$$

Lösung: I. Undefinierte Ausdrücke vom Typ „$\frac{0}{0}$" oder „$\frac{\infty}{\infty}$" lassen sich im Rahmen der Analysis nach der Regel von de l'Hospital errechnen vermöge der Identität:

$$\lim_{x->x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x->x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

wobei für zwei differenzierbare Funktionen f(x), g(x) die Bedingung $f(x_0) = g(x_0) = 0$ oder $= \pm\infty$ für $x_0 \varepsilon \mathbf{R}$ oder $x_0 = \pm\infty$ gilt. Die Regel von de l'Hospital lässt sich auch auf unbestimmte Ausdrücke vom Typ „$0\cdot\infty$", „$\infty - \infty$", „1^∞", „0^0", „∞^0" anwenden:

Unbestimmte Ausdrücke	
Typ	*Termumformung*
$0\cdot\infty$	$f(x)g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$
∞-∞	$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)} = \frac{g(x)-f(x)}{f(x)g(x)} = f(x)\left(1-\frac{g(x)}{f(x)}\right) = \frac{1-\frac{g(x)}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$
0^0, 1∞, ∞^0	$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$

Unbestimmte Ausdrücke

II. Der (rechtsseitige) Grenzwert $\lim_{\substack{x->0\\x>0}} x^x$ ist vom Typ 0^0, so dass sich wegen der Termumformung:

$$x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x\ln(x)} = e^{\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}}$$

ein Grenzwert vom Typ „$\frac{\infty}{\infty}$" ergibt, auf dem die Regel von de l'Hospital mit den Ableitungen ($\ln(x))' = 1/x$ und $(1/x)' = -2/x^2$ Anwendung findet:

$$\lim_{\substack{x->0\\x>0}} x^x = \lim_{\substack{x->0\\x>0}} e^{\ln(x^x)} = \lim_{\substack{x->0\\x>0}} e^{x\ln(x)} = \lim_{\substack{x->0\\x>0}} e^{\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{\substack{x->0\\x>0}} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} e^{\lim_{\substack{x->0\\x>0}} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim_{\substack{x->0\\x>0}} \frac{-x^2}{x}} = e^{\lim_{\substack{x->0\\x>0}} (-x)} = e^0 = 1.$$

www.michael-buhlmann.de / 12.2020 / Aufgabe 1198