Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Grenzwerte von Funktionen/L'Hospital-Regel

Aufgabe: Berechne den Grenzwert:

$$\lim_{x->\infty} \sqrt[x]{x}\,.$$

Lösung: I. Undefinierte Ausdrücke vom Typ „$\frac{0}{0}$" oder „$\frac{\infty}{\infty}$" lassen sich im Rahmen der Analysis nach der Regel von de l'Hospital errechnen vermöge der Identität:

$$\lim_{x->x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x->x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

wobei für zwei differenzierbare Funktionen f(x), g(x) die Bedingung $f(x_0) = g(x_0) = 0$ oder $= \pm\infty$ für $x_0 \varepsilon$ **R** oder $x_0 = \pm\infty$ gilt. Die Regel von de l'Hospital lässt sich auch auf unbestimmte Ausdrücke vom Typ „$0\cdot\infty$", „$\infty - \infty$", „1^∞", „0^0", „∞^0" anwenden:

Unbestimmte Ausdrücke	
Typ	*Termumformung*
$0\cdot\infty$	$f(x)g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$
$\infty-\infty$	$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)} = \frac{g(x)-f(x)}{f(x)g(x)} = f(x)\left(1-\frac{g(x)}{f(x)}\right) = \frac{1-\frac{g(x)}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$
0^0, 1∞, ∞^0	$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$

Unbestimmte Ausdrücke

II. Der Grenzwert $\lim_{x->\infty} \sqrt[x]{x}$ ist vom Typ ∞^0, so dass sich wegen der Termumformung:

$$\sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln(x^{\frac{1}{x}})} = e^{\frac{1}{x}\ln(x)} = e^{\frac{\ln(x)}{x}}$$

ein Grenzwert vom Typ „$\frac{\infty}{\infty}$" ergibt, auf dem die Regel von de l'Hospital mit den Ableitungen (ln(x))' = 1/x und (x)' = 1 Anwendung findet:

$$\lim_{x->\infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x->\infty} e^{\ln(x^{\frac{1}{x}})} = \lim_{x->\infty} e^{\frac{\ln(x)}{x}} = e^{\lim_{x->\infty}\frac{\ln(x)}{x}} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} e^{\lim_{x->\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}} = e^{\lim_{x->\infty}\frac{1}{x}} = e^0 = 1\,.$$

www.michael-buhlmann.de / 12.2020 / Aufgabe 1199