Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Grenzwerte von Funktionen/L'Hospital-Regel

Aufgabe: Berechne den Grenzwert:

$$\lim_{\substack{x->1 \\ x<1}} \left(\ln x \cdot \ln(1-x)\right).$$

Lösung: I. Undefinierte Ausdrücke vom Typ „$\frac{0}{0}$" oder „$\frac{\infty}{\infty}$" lassen sich im Rahmen der Analysis nach der Regel von de l'Hospital errechnen vermöge der Identität:

$$\lim_{x->x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x->x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

wobei für zwei differenzierbare Funktionen f(x), g(x) die Bedingung $f(x_0) = g(x_0) = 0$ oder $= \pm\infty$ für $x_0 \varepsilon \mathbf{R}$ oder $x_0 = \pm\infty$ gilt. Die Regel von de l'Hospital lässt sich auch auf unbestimmte Ausdrücke vom Typ „$0\cdot\infty$", „$\infty - \infty$", „1^∞", „0^0", „∞^0" anwenden:

Unbestimmte Ausdrücke	
Typ	*Termumformung*
$0\cdot\infty$	$f(x)g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$
$\infty-\infty$	$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)} = \frac{g(x)-f(x)}{f(x)g(x)} = f(x)\left(1-\frac{g(x)}{f(x)}\right) = \frac{1-\frac{g(x)}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$
0^0, 1^∞, ∞^0	$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$

Unbestimmte Ausdrücke

II. Der Grenzwert $\lim_{\substack{x->1 \\ x<1}} \left(\ln x \cdot \ln(1-x)\right)$ ist vom Typ $0\cdot(-\infty)$, so dass mit einigen Umformungen, den Grenzwertsätzen und der Anwendung der Regel von de l'Hospital folgt:

$$\lim_{\substack{x->1 \\ x<1}} \left(\ln x \cdot \ln(1-x)\right) \underset{0\cdot(-\infty)}{=} \lim_{\substack{x->1 \\ x<1}} \frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{\substack{x->1 \\ x<1}} \frac{\ln(1-x)}{(\ln x)^{-1}} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{\substack{x->1 \\ x<1}} \frac{\frac{1}{1-x}\cdot(-1)}{-(\ln x)^{-2}\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x->1 \\ x<1}} \frac{\frac{1}{1-x}}{\frac{1}{\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}} =$$

$$\lim_{\substack{x->1 \\ x<1}} \frac{x\ln^2 x}{1-x} \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x->1 \\ x<1}} \frac{1\cdot\ln^2 x + x\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{-1} = \lim_{\substack{x->1 \\ x<1}} \frac{\ln^2 x + 2\ln x}{-1} = -\left(\ln^2 1 + 2\ln 1\right) = -(0+0) = 0.$$

www.michael-buhlmann.de / 01.2021 / Aufgabe 1288